

**SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM**  
**Természettudományi- és Informatikai Kar**  
Informatika Doktori Iskola  
Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék

# Topológia-megőrző képműveletek és a vékonyítás új módszerei

– doktori értekezés –

**Kardos Péter**

*Témavezető:* Dr. Palágyi Kálmán

Szeged, 2013.





# Tartalomjegyzék

<b>1. Digitális topológia</b>	<b>7</b>
1.1. Alapfogalmak . . . . .	7
1.1.1. Vizsgált rácsok és mozaikok . . . . .	7
1.1.2. Szomszédsági relációk . . . . .	9
1.1.3. Digitális bináris képek és egység-elemek . . . . .	9
1.2. Topológia-megőrző képműveletek . . . . .	12
<b>2. A váz fogalma és a vázkijelölés módszerei</b>	<b>21</b>
2.1. A váz és a vázkijelölés . . . . .	21
2.2. Vékonyítás . . . . .	22
2.2.1. Szekvenciális vékonyítás . . . . .	23
2.2.2. Párhuzamos vékonyítás . . . . .	23
2.2.3. Szűkületi pontok megtartásán alapuló vékonyítás . . . . .	27
<b>3. Topológia-megőrző képműveletek</b>	<b>29</b>
3.1. Egyszerű pixelek jellemzése . . . . .	29
3.1.1. Egyszerű pixelek $(\mathcal{H}, 1, 1)$ képeken . . . . .	29
3.1.2. Egyszerűség a $(\mathcal{T}, 2, 1)$ és a $(\mathcal{T}, 1, 2)$ képeken . . . . .	30
3.1.3. Az egyszerűség általános jellemzése . . . . .	32
3.2. Elegendő feltételek topológia-megőrző redukciókra . . . . .	34
3.2.1. Feltételek $(\mathcal{H}, 1, 1)$ képekre . . . . .	34
3.2.2. Feltételek $(\mathcal{T}, 2, 1)$ és $(\mathcal{T}, 1, 2)$ képekre . . . . .	35
3.2.3. A feltételek általánosítása 2D képekre . . . . .	35
3.3. Elegendő feltételek topológia-megőrző addíciókra . . . . .	38
3.4. Összefoglalás és távlati célok . . . . .	39
<b>4. Topológia-megőrző hexagonális és trianguláris vékonyító algoritmusok</b>	<b>41</b>
4.1. Teljesen párhuzamos algoritmusok . . . . .	42
4.2. Irány-alapú párhuzamos algoritmusok . . . . .	43
4.3. Almező-alapú párhuzamos algoritmusok . . . . .	45
4.4. Az új algoritmusokkal generált vázszerű jellemzők . . . . .	47
4.5. Összefoglalás és távlati célok . . . . .	48

<b>5. Iterációnkénti simítással kombinált vékonyítás 3D képeken</b>	<b>51</b>
5.1. Kontúrsimító algoritmus . . . . .	52
5.2. Az új vékonyító séma . . . . .	53
5.3. Implementáció . . . . .	54
5.4. Az új sémán alapuló algoritmusok kiértékelése . . . . .	55
5.5. Összefoglalás és távlati célok . . . . .	57
<b>6. Bejárás-független szekvenciális vékonyítás</b>	<b>67</b>
6.1. A bejárás-függetlenség szükséges és elegendő feltételei . . . . .	68
6.2. Bejárás-független szekvenciális vékonyító algoritmusok . . . . .	70
6.2.1. Algoritmusok törlőmaszkokkal adott törlési feltételekkel .	71
6.2.2. További algoritmusok . . . . .	71
6.3. Eredmények . . . . .	76
6.4. Összefoglalás és távlati célok . . . . .	78
<b>Összegzés</b>	<b>81</b>
<b>Summary</b>	<b>83</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>85</b>
<b>A szerző közleményei</b>	<b>87</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>90</b>

# Bevezető

A digitális topológia a bináris digitális képek topológiai tulajdonságaival foglalkozik. A legfontosabb kérdése az, hogy az egyes képműveletek megőrzik-e a topológiát. A bináris képműveletek két kitüntetett típusa a redukció és addíció, melyek rendre csak az objektumpontokat ill. csak a háttérpontokat módosíthatják.

A vékonyítás mint a vázkijelölés gyakran alkalmazott módszere a tűzfront-terjedést szimulálja diszkrét tereken: egy iterációs lépésben az objektum határáról távolítja el a törölhetőnek minősített pontokat és az eljárás addig folytatódik, míg törölhető pont található a kép redukált objektumain. A vékonyító eljárásokkal szemben az elsődleges elvárásunk az, hogy a kapott struktúra őrizze meg a kiindulási kép topológiáját.

Bár egyaránt ismeretesek szekvenciális és párhuzamos vékonyító sémák, a tűzfront-terjedés párhuzamos jellege miatt elterjedtebbek a párhuzamos változatok. Ezekre a topológia-megőrzés igazolása azonban rendszerint nehezebb, mint a szekvenciális módszereké. Mivel az algoritmusok egy-egy iterációs lépése egy vagy több redukcióból áll, így kulcsfontosságú annak ellenőrzése, hogy az adott eljárás valamennyi fázisának redukciója topológiailag korrekt-e.

Redukciók topológia-megőrzésére korábban többen javasoltak elegendő feltételeket. Azonban ezek csak a négyzet- és a kocka-mozaikon mintavételezett képekre érvényesek. Addíciókra pedig egyáltalán nem javasoltak még a redukciókéhoz hasonló kritériumokat. Értekezésemben mind a redukciókra, mind pedig az addíciókra olyan elegendő feltételeket ismertetek, amelyek a háromszög-, a négyzet-, és a hatszög-mozaikokon mintavételezett képekre egyaránt érvényesek. Bemutatok továbbá néhány hexagonális és trianguláris vékonyító algoritmust, amelyek az új elegendő feltételeket kombinálják párhuzamos vékonyító stratégiákkal, így a topológiai korrektségük további bizonyítások nélkül is garantált.

A vázkijelölő módszerek további általános problémája az, hogy vázközelítései számos hamis ágat vagy felszínszegmenst tartalmazhatnak, amelyeket általában egy utófeldolgozó lépésben távolítanak el. Az utólagos váztisztítás hátránya az, hogy egyrészt nehéz olyan fontossági mértéket találni, amellyel megkülönböztethetők a lényeges és az eltávolítandó részletek, másrészt pedig megmaradnak az „értékes” részletek torzulásai is. A dolgozatban bemutatok egy új megközelítést, ami a vékonyítást kombinálja iterációnkénti kontúrsimítással. A javasolt módszer hasznosságát egy új 3D kontúrsimító algoritmussal

igazolom számos párhuzamos vékonyító eljárásra.

A szekvenciális vékonyítás egyik nagy előnye a párhuzamossal szemben az, hogy lényegesen könnyebb a topológiai korrektség garantálása, hiszen ekkor egyszerre csak egyetlen pontot törölhetünk. Jellemző hátránya azonban, hogy a szekvenciális algoritmusok eredménye függ a határpontok meglátogatásának sorrendjétől. A dolgozatban olyan szükséges és elegendő feltételeket is megadok, amelyekkel ellenőrizhető az, hogy egy szekvenciális eljárás bejárás-független-e, azaz a határpontok tetszőleges sorrendben történő meglátogatása mellett ugyanazt az eredményt állítja-e elő. Ismertetek továbbá számos olyan 2D és 3D szekvenciális vékonyító algoritmust is, amelyek bejárás-függetlensége az említett feltételek segítségével igazolható.

Dolgozatom a következő felépítést követi: Az 1. fejezetben áttekintem a digitális topológia alapfogalmait és korábbi eredményeit. A 2. fejezetben a vázkijelölés és a vékonyítás főbb módszereit foglalom össze, míg a 3-6. fejezetekben a saját eredményeimet mutatom be. Az első téziscsoport eredményeit összegző 3. fejezet a redukciók és addíciók topológia-megőrzésének elegendő feltételeit ismerteti háromszög-, négyzet- és hatszög-mozaikon mintavételezett képeken. A 4. fejezet néhány vékonyító algoritmus bemutatásával illusztrálja azt, hogy az új feltételekkel nemcsak a redukciók topológiai korrektsége validálható, hanem az is, hogy segítségükkel topológiailag korrekt eljárások is konstruálhatók. A második téziscsoportához tartozó 5. fejezetben először egy topológia-megőrző párhuzamos kontúr-simító algoritmust ismertetek, majd bemutatok egy új vékonyító sémát, ami a vékonyító eljárásokat iterációnkénti kontúrsmítással kombinálva, lényegesen kevesebb hamis vonal- és felszínszegmenst tartalmazó vázszerű alakjellemzőket generál, mint a hagyományos vékonyítás. A 6. fejezetben a bejárás-független szekvenciális vékonyításra vonatkozó eredményeimet foglalom össze. Ezen fejezetek után a magyar és az angol nyelvű összegzés következik. Az értekezést a közleményeim és a források jegyzéke zárja.

# 1. fejezet

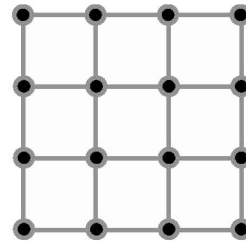
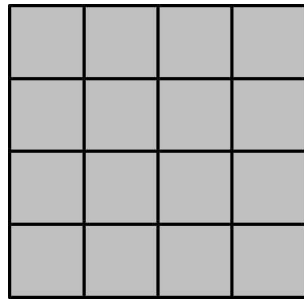
## Előzmények a digitális topológia területén

E fejezetben áttekintést adok a digitális topológia alapfogalmairól, valamint ismertetem a topológia-megőrző (bináris) képműveletekre korábban javasolt elegendő feltételeket.

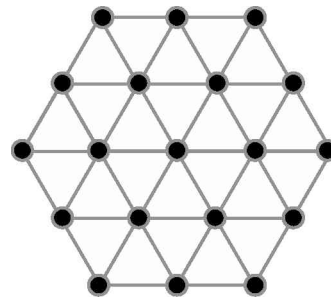
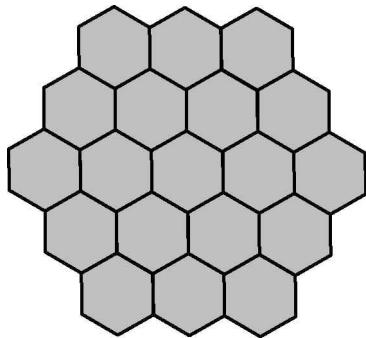
### 1.1. Alapfogalmak

#### 1.1.1. Vizsgált rácsok és mozaikok

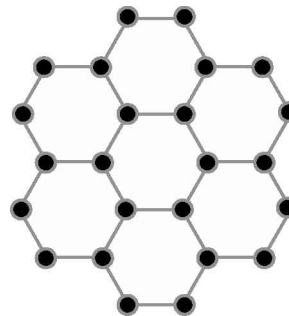
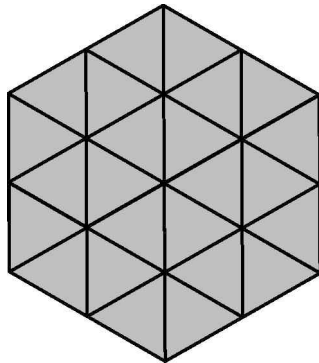
A 2D és a 3D euklidészi teret uniform mintavételezésekkel szabályos poligonokra, illetve poliéderekre partícionáljuk [13]. 2D-ben csak három, 3D-ben pedig csak egy szabályos mozaik létezik, vagyis csak a szabályos háromszög, a négyzet, a szabályos hatszög, ill. a kocka egybevágó példányaival lehetséges átfedések nélkül és hézagmentesen lefedni a teret [50]. A szabályos mozaikok poligonjai ill. poliéderei egy-egy *képelemet* határoznak meg, amelyeket 2D-ben *pixele*eknek (*picture element*), 3D-ben pedig *vozelek*eknek (*volume element*) nevezünk. A teret kitöltő képelemek halmazát a dolgozatban  $V$  jelöli. Valamennyi szabályos mozaikhoz megadható egy-egy *duális rács*, amelyek rácspontjainak halmazát a kiindulási mozaik poligonjainak (illetve 3D-ben kockáinak) középpontjai alkotják, 2D-ben az élek az élen osztozó poligonok középpontjait kötik össze, míg 3D-ben a lapon osztozó kockaközéppontok között futnak. A dolgozatban következetesen a mozaikos ábrázolást alkalmazom 2D-ben, míg a 3D kocka-mozaik helyett a vele duális rácson illusztrálom a szükséges fogalmakat és a vizsgált tulajdonságokat. A konvencionális négyzet- és kocka-mozaik képelemeinek halmazát  $\mathcal{S}$  ill.  $\mathcal{C}$  jelöli, míg a hatszög- és a háromszög-mozaik pixeleinek halmazát pedig rendre  $\mathcal{H}$  és  $\mathcal{T}$  jelöli. A vizsgált mozaikokat és a velük duális rácsokat az 1.1. ábra szemlélteti.



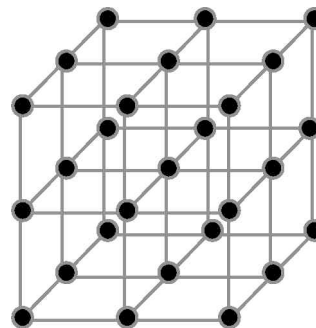
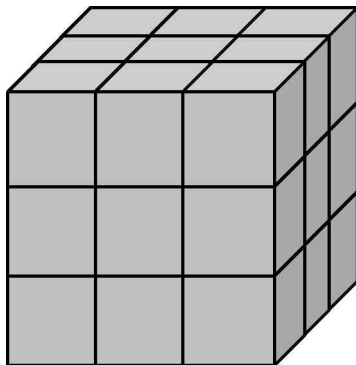
(a)



(b)



(c)



(d)

1.1. ábra. Szabályos mozaikok és a velük duális rácsok: négyzet-mozaik és négyzet-rács (a), hatszög-mozaik és háromszög-rács (b), háromszög-mozaik és hatszög-rács (c), kocka-mozaik és kocka-rács (d).



### 1.1.2. Szomszédsági relációk

A digitális topológia alapfogalmai közül először a képelemek közötti szomszédsági relációkat mutatom be. A figyelembevett 2D mozaikokon mintavételezett képeken két poligon (pixel) *1-szomszédos* ill. *2-szomszédos*, ha azok rendre élen ill. élen vagy csúcson érintkeznek. Ezt a koncepciót követve a 3D kocka-mozaik (vagyis  $\mathcal{C}$ ) két eleme 1-, 2-, ill. *3-szomszédos*, ha két egységkocka rendre lapon, lapon vagy élen, illetve lapon, élen vagy csúcson osztozik. Minden képelemet önmagával  $m$ -szomszédosnak tekintünk ( $m = 1, 2, 3$ ), vagyis valamennyi szomszédsági reláció reflexív. Nyilvánvaló, hogy a fenti relációk szimmetrikusak is. A  $p \in V$  képelemmel  $m$ -szomszédos elemek halmazára a továbbiakban  $N_m^V(p)$  jelöléssel hivatkozok, míg a  $p$  valódi  $m$ -szomszédait az  $N_m^{*V}(p) = N_m^V(p) \setminus \{p\}$  halmaz tartalmazza. A következőkben áttekintem az egyes mozaikok szomszédsági relációinak sajátosságait.

#### Háromszög-mozaik

A háromszög-mozaik egy eleme 3 további pixellel osztozik élen és 12-vel csúcson, lásd 1.2(a) ábra. Ennélfogva (a valódi szomszédok száma alapján) az 1- és a 2-szomszédságot rendre 3- és a 12-szomszédságnak is szokták említeni [50].

#### Négyzet- és kocka-mozaik

A négyzet- és kocka-mozaik elemeinek középpontjai a 2D és a 3D euklidészi terek egész koordinátájú rácsponthai. Az  $m$ -szomszédsági relációkat szokásos még az egyes pontok valódi  $m$ -szomszédainak száma alapján elnevezni. Ennélfogva 2D-ben az 1- és a 2-szomszédokat rendre 4- ill. 8-*szomszéd*nak, 3D-ben pedig 6-, 18-, és 26-*szomszéd*oknak is nevezzük [32], lásd az 1.2(b) és az 1.2(d) ábrákat.

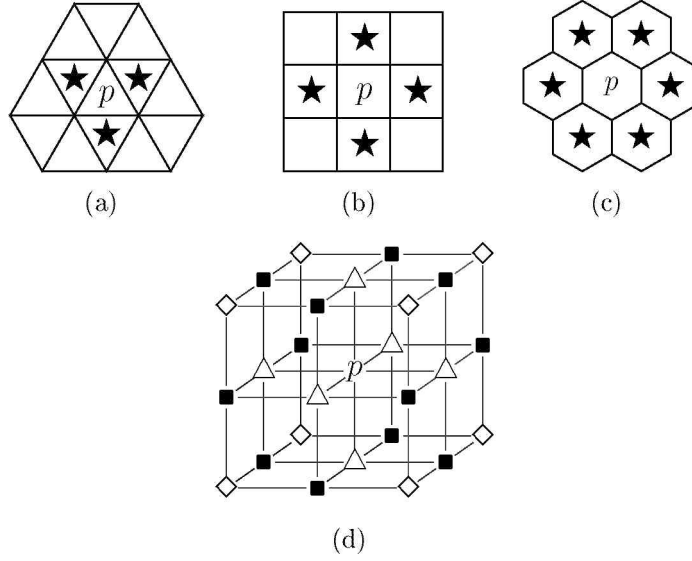
#### Hatszög-mozaik

A hatszög-mozaik elemei 6 további pixellel osztoznak élen és egyúttal csúcson is, így az 1- és a 2-szomszédság egybeesik, lásd az 1.2(c) ábra. A többi mozaikhoz hasonlóan, a valódi szomszédok száma alapján az 1-szomszédságot 6-szomszédságnak is nevezik [50].

### 1.1.3. Digitális bináris képek és egység-elemek

Az alábbiakban Kong és Rosenfeld áttekintő munkájának [32] jelöléseit és tárgyalásmódját követem. Hasonlóan az alapl műhöz, a számos fogalmat nem számozott definíciók tucatjaival, hanem a folyó szövegbe ágyazottan mutatom be.

Legyen  $Q \subset V$  a képelemek halmazának egy tetszőleges részhalmaza. A  $\langle p_0, \dots, p_t \rangle$  elemsorozat egy  $p_0$ -ból  $p_t$ -be vezető ( $t$ -hosszú)  $m$ -út  $Q$ -ban ( $m = 1, 2$ , ha  $V = \mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}$ , és  $V = \mathcal{C}$  esetén  $m = 1, 2, 3$ ), ha  $p_i \in Q$  ( $i =$



1.2. ábra. Szomszédsági relációk a háromszög-mozaikon (a), négyzet-mozaikon (b), hatszög-mozaikon (c), és a kocka-mozaikkal duális kocka-rácson (d). Az (a)-(c) ábrákon a  $p$  pixel 1-szomszédjai a „★” szimbólumokkal jelölt képelemek, a többi pixel a  $p$ -nek 2- de nem 1-szomszédja. A (d) ábrán a  $p$  pont 1-szomszédjai a „△” szimbólumokkal jelölt pontok. A  $p$  2-, de nem 1-szomszédjai a „■” jelölésű pontok, továbbá  $p$  3-, de nem 2-szomszédjai a „◇” szimbólummal ellátott pontok.

$0, \dots, t$ ) és  $p_j \in N_m^V(p_{j-1})$  ( $j = 1, \dots, t$ ). A  $Q$  halmaz két voxele,  $p$  és  $q$   $m$ -összefüggő, ha létezik  $p$ -ből  $q$ -ba vezető  $m$ -út  $Q$ -ban. Könnyen belátható, hogy az  $m$ -összefüggőségi reláció reflexív (mivel a  $\langle p \rangle$  sorozat definíció szerint egy 0 hosszúságú  $m$ -út), szimmetrikus (mivel az  $m$ -szomszédsági reláció szimmetrikus, így valamennyi  $m$ -út megfordítása is egy  $m$ -út) és tranzitív (mivel két  $m$ -út összefűzésével is egy  $m$ -utat kapunk). Az  $m$ -összefüggőség tehát ekvivalencia-reláció, vagyis megadja a  $Q$  halmaznak egy osztályozását, ahol az ekvivalencia-osztályokat a  $Q$  halmaz  $m$ -komponenseinek nevezzük [32].

A bináris képek elemei mindössze kettő, a 0 és az 1 értékeket vehetik fel. Kong és Rosenfeld a *digitális bináris képeket* a  $\mathcal{P} = (V, k, \bar{k}, B)$  rendezett négyessel írta le [32], ahol:

- $V$  a képelemek halmaza,
- $B \subseteq V$  a fekete képelemek halmaza, melynek a  $\bar{B} = V \setminus B$  komplementere pedig a fehér képelemek halmaza,
- $k$ -összefüggőséget tételezünk fel a  $B$  halmazra, vagyis a fekete képelemekre,
- $\bar{k}$ -összefüggőséget veszünk figyelembe a  $\bar{B}$  halmazra (a fehér képelemekre).

A  $\mathcal{P} = (V, k, \bar{k}, B)$  kép *inverzén* a  $(V, \bar{k}, k, V \setminus B)$  képet értjük, és ezt a képet  $\mathcal{P}^{-1}$ -gyel jelöljük.

Egy  $(V, k, \bar{k}, B)$  képet röviden  $(V, k, \bar{k})$  képnek is nevezünk.

Fontos megjegyezni, hogy ellentétben a digitális képfeldolgozásban megszokott konvencióval, miszerint a világosabb intenzitásokhoz nagyobb értéket rendelünk, a digitális topológiában a fekete pontoknak feleltetjük meg az 1 értéket, a fehéreknek pedig a 0-t.

A  $\mathcal{P}$  digitális kép véges, ha  $B$  véges. Digitális bináris képeken a fekete  $k$ -komponenseket *objektumoknak* nevezzük. A véges képeken levő egyetlen végtelen fehér  $\bar{k}$ -komponenst *háttérnek* nevezzük, a véges fehér  $\bar{k}$ -komponensek pedig a kép *üregei*. Egy fekete pont *izolált*, ha egymaga alkot objektumot. A  $p \in B$  képelem *határpont* a  $(V, k, \bar{k}, B)$  képen, ha  $p$   $\bar{k}$ -szomszédos legalább egy fehér ponttal (vagyis  $N_k^{*V}(p) \cap \bar{B} \neq \emptyset$ ). Ha egy  $p \in B$  pont nem határpont, akkor azt *belső pontnak* nevezzük.

A fentiek mellett 3D képeken új topológiai fogalom a *lyuk* (vagy alagút) [32]. Lyukat tartalmazó objektumként említhető például a tórusz.

A fekete ill. fehér képelemekre vonatkozó összefüggőségi relációk meghatározásánál figyelembe kell vennünk az ún. *Jordan tulajdonságot*, mely szerint a folytonos teret egy egyszerű zárt görbe (Jordan-görbe) két komponensre partícionálja (egy külsőre és egy belsőre) oly módon, hogy akárhogy is választunk ki egy-egy pontot a külső és a belső komponensből, azok nem köthetők össze a görbe metszése nélkül [50]. Ezen összefüggés diszkrét megfelelőjének kimondásához szükséges bevezetnünk az ún. digitális görbék és zárt görbék fogalmát. Egy  $X$  ponthalmazbeli  $\langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$  pontsorozat *j-görbe*  $u$ -ból  $v$ -be, ha az alábbiak teljesülnek rá:

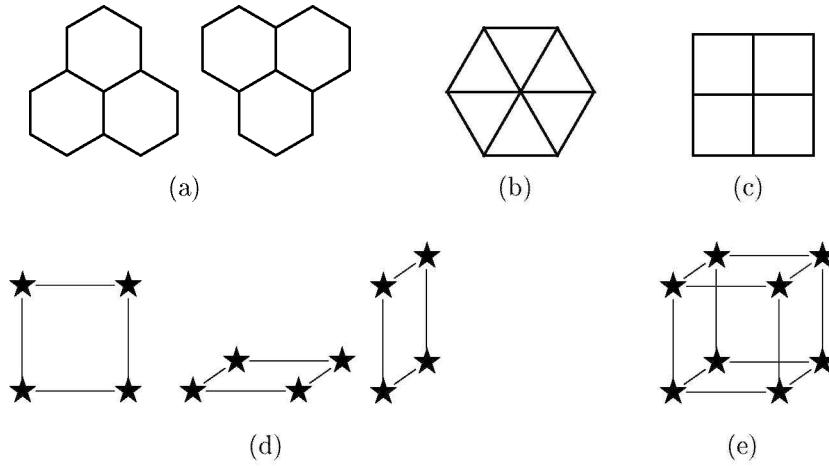
- (i)  $p_0 = u, p_n = v$ ;
- (ii) Bármely  $i$ -re teljesül, hogy  $N_j^{*V}(p_i) = \{p_{i-1}, p_{i+1}\}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ );
- (iii)  $N_j^{*V}(p_0) = \{p_1\}, N_j^{*V}(p_n) = \{p_{n-1}\}$ .

A  $\langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$  görbét akkor nevezzük *zárt görbének*, ha  $p_0 = p_n$ .

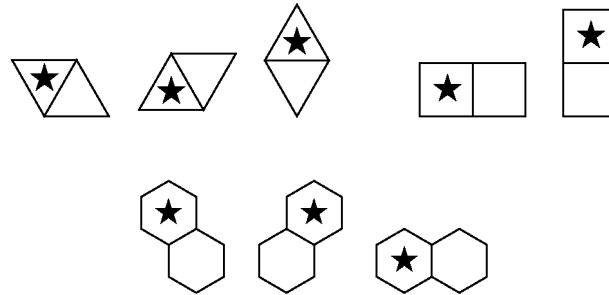
**1.1.1. tulajdonság** (Diszkrét Jordan-tulajdonság). [50] *A  $(V, k, \bar{k}, B)$  képekre teljesül a diszkrét Jordan-tulajdonság, ha minden olyan esetben, amikor  $B$  zárt  $k$ -görbét alkot,  $V \setminus B$  pontosan kettő  $\bar{k}$ -komponensből áll (a háttérből és egy üregből).*

A Diszkrét Jordan-tulajdonság teljesül a  $(\mathcal{T}, 1, 2)$ , a  $(\mathcal{T}, 2, 1)$ , az  $(\mathcal{S}, 1, 2)$ , az  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  és a  $(\mathcal{H}, 1, 1) = (\mathcal{H}, 2, 2)$  2D képekre és valamennyi  $(\mathcal{C}, k, \bar{k})$  képre, ahol  $k \neq \bar{k}$  ( $k, \bar{k} = 1, 2, 3$ ) [32, 50].

A  $V$  mozaik azon pontjainak maximális halmazát, melynek bármely két eleme  $m$ -szomszédos, a  $V$   $mD$  *egység-elemének* nevezzük ( $m = 2, 3$ ). Ha  $V = \mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}$ , akkor csak 2D, míg  $V = \mathcal{C}$  esetén 2D és 3D egység-elemekről is beszélhetünk (lásd 1.3 ábra).



1.3. ábra. 2D egység-elemek a  $\mathcal{H}$  (a), az  $\mathcal{S}$  (b), és a  $\mathcal{T}$  mozaikon (c). A  $\mathcal{C}$  mozaik 2D egység-elemei (d) és 3D egység-eleme (e).



1.4. ábra. Lehetséges 1-szomszédos pixelekből álló párok a  $\mathcal{T}$ , az  $\mathcal{S}$  és a  $\mathcal{H}$  mozaikon. A  $\star$ -gal jelölt pixelek a párok kitüntetett elemei.

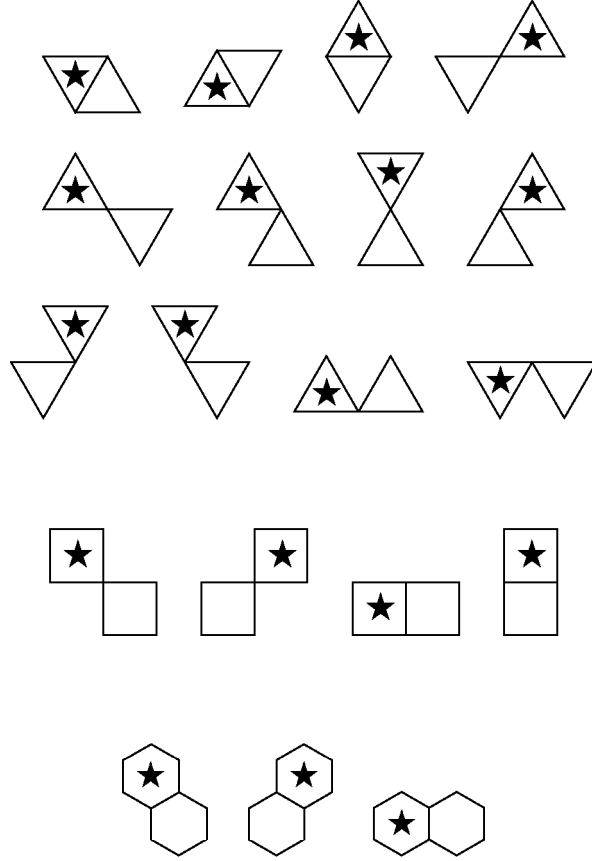
Legyen  $p$  és  $q$  két  $n$ -szomszédos  $V$  halmazbeli pixel ( $n = 1, 2, V = \mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{H}$ ), melyek lehetséges konfigurációit az 1.4. és 1.5. ábrák mutatják.

Egy 2D  $(V, k, \bar{k})$  kép fekete komponensét *kis objektumnak* nevezzük, ha azt egy 2D egység-elem tartalmazza, továbbá nem egy pixelből és nem kettő  $\bar{k}$ -szomszédos pixelből áll. Hasonlóképpen, *kis üregen* egy  $(V, k, \bar{k})$  kép olyan fehér komponensét értjük, ami egy 2D egység-elembe foglalható, továbbá nem egy pixelből és nem kettő  $\bar{k}$ -szomszédos pixelből áll.

Az  $(V, 2, 1)$  képek kis objektumainak ill. az  $(V, 1, 2)$  képek kis üregeinek összes lehetséges konfigurációja az 1.6-1.8. ábrákon látható, melyeken a  $\star$  szimbólummal jelölt képelemet az adott kis objektum ill. kis üreg *kitüntetett elemének* nevezzük.

## 1.2. Topológia-megőrző képműveletek

A  $V$  képpont-halmazon az  $\mathcal{O}$  képművelet egy  $P(V) \rightarrow P(V)$  leképezés, ahol  $P(V)$  a  $V$  halmaz hatványhalmazát jelöli. Az  $\mathcal{O}$  képművelet eredményeként a



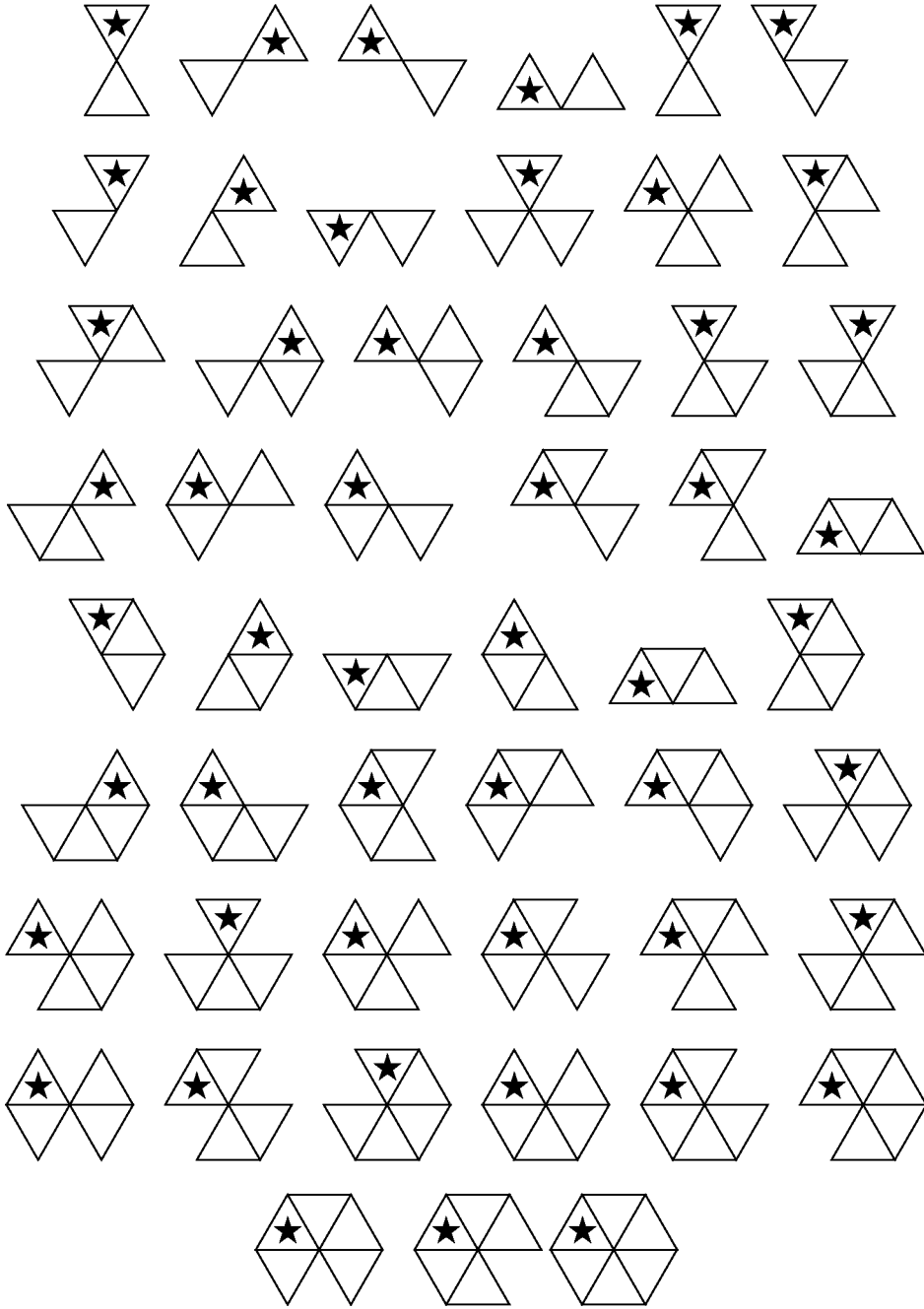
1.5. ábra. Lehetséges 2-szomszédos pixelekből álló párok a  $\mathcal{T}$ , az  $\mathcal{S}$  és a  $\mathcal{H}$  mozaikon. A ★-gal jelölt pixelek a párok kitüntetett elemei.

$(V, k, \bar{k}, B)$  képből a  $(V, k, \bar{k}, \mathcal{O}(B))$  képet kapjuk. Ha  $\mathcal{O}(B) \subseteq B$  valamennyi  $B \subseteq V$  halmazra teljesül, akkor az  $\mathcal{O}$  képművelet *redukció*, ha pedig  $B \subseteq \mathcal{O}(B)$  áll fenn minden  $B \subseteq V$ -re, akkor  $\mathcal{O}$ -t *addíciónak* nevezzük. A redukciók tehát csak fekete képelemeket, míg az addíciók csak a fehéreket változtathatják ellentétes színűre. Előbbiek átszínezését *törlésnek*, utóbbiakét pedig *kitöltésnek* nevezzük.

Egy redukció *topológia-megőrző*, ha a bemeneti kép bármely objektuma a kimeneti képnek pontosan egy objektumát tartalmazza, és az eredménykép valamennyi fehér komponense az input kép pontosan egy fehér komponensét tartalmazza [32]. 2D redukciók esetén ez konkrétabban az alábbi módon is megfogalmazható.

**1.2.1. kritérium.** [31] Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha valamennyi képre teljesíti az alábbi feltételeket:

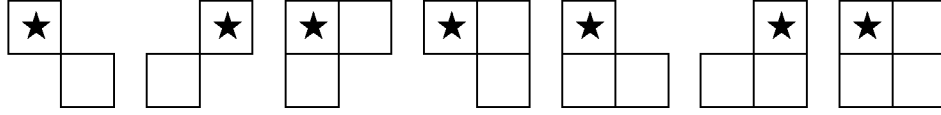
1.  $\mathcal{R}$  nem szakít szét (kettő vagy több darabra) objektumot.
2.  $\mathcal{R}$  nem töröl teljesen objektumot.
3.  $\mathcal{R}$  nem olvaszt össze üreget sem másik üreggel, sem pedig a háttérrel.



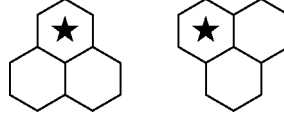
1.6. ábra.  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képek (ill.  $(\mathcal{T}, 1, 2)$  képek) 51 lehetséges kis objektuma (ill. kis ürege). A ★ szimbólummal jelölt pixelek a kitüntetett elemek.

4.  $\mathcal{R}$  nem hoz létre új üreget.

Mivel a 3D képeken objektumok és üregek mellett lyukak is megjelenhetnek, így a 3D redukciók esetén a fenti feltételek mellett az alábbiakat is figyelembe kell vennünk [32].



1.7. ábra.  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képek (ill.  $(\mathcal{S}, 1, 2)$  képek) 7 lehetséges kis objektuma (ill. kis ürege). A ★ szimbólummal jelölt pixelek a kitüntetett elemek.



1.8. ábra. A  $(\mathcal{H}, 1, 2) = (\mathcal{H}, 2, 1) = (\mathcal{H}, 1, 1) = (\mathcal{H}, 2, 2)$  képek két lehetséges kis objektuma ill. kis ürege. A ★ szimbólummal jelölt pixelek a kitüntetett elemek.

**1.2.2. kritérium.** [31] *Az  $\mathcal{R}$  3D redukció topológia-megőrző, ha valamennyi képre teljesíti az 1.2.1. kritériumban előírtakat valamint az alábbi feltételeket:*

1.  $\mathcal{R}$  nem olvaszt össze kettő vagy több lyukat.
2.  $\mathcal{R}$  nem szünt meg lyukat.
3.  $\mathcal{R}$  nem hoz létre lyukat.

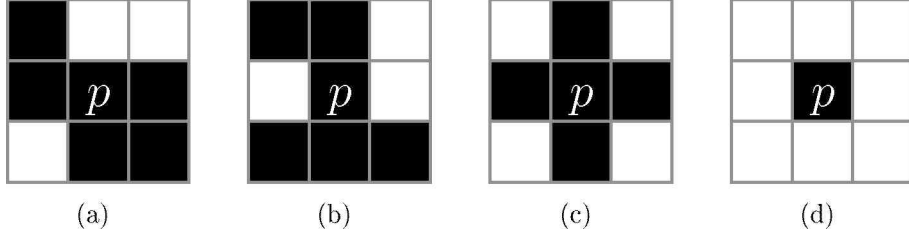
Egy 2D addíció topológia-megőrző, ha az eredeti kép bármely fehér komponense a kapott képnek pontosan egy fehér komponensét tartalmazza, és az eredménykép valamennyi objektuma az input kép pontosan egy objektumát tartalmazza. A topológia-megőrző addíciókkal szembeni konkrét elvárások a fenti kritériumokhoz hasonló módon is megfogalmazhatók, ennek részleteire itt nem térek ki.

A topológia-megőrzés vizsgálata az ún. egyszerű képelemek fogalmán alapul. Bár a [32]-ben definiált egyszerűség csak a fekete képelemek törlésére vonatkozik, az általánosítható tetszőleges színű képelemekre is az alábbi módon: a  $p$  (fekete vagy fehér) képelem *egyszerű* egy  $(V, k, \bar{k})$  képen, ha átszínezése egy topológia-megőrző művelet (azaz a kép topológiája nem függ  $p$  színétől).

Az egyszerű képelemek jellemzésére ill. a topológia korrektség vizsgálatára korábban csak négyzet- és kocka-mozaikon mintavételezett képeken értelmezett redukciókra adtak kritériumokat. Az alábbiakban ezeket tekintem át.

**1.2.1. tétel.** [32] *Legyen  $p \in B$  a  $(\mathcal{S}, k, \bar{k}, B)$   $((k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$  képnek egy nem-izolált határpixe. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1.  $p$  egyszerű pixel.
2.  $p$  pontosan egy  $N_2^{\mathcal{S}}(p) \cap B$  halmazbeli  $k$ -komponenssel  $k$ -szomszédos.
3.  $p$  pontosan egy  $N_2^{\mathcal{S}}(p) \setminus B$  halmazbeli  $\bar{k}$ -komponenssel  $\bar{k}$ -szomszédos.



1.9. ábra. Példák egyszerű (a) és nem-egyszerű (b-d) pontokra  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képeken. A (b-d) ábrákon  $p$  törlésével rendre az alábbi jelenségek lépnek fel: egy objektum két részre szakad (nem teljesül az 1.2.1. tétel 2. és 3. feltétele), egy új üreg keletkezik (belső pixelt törölünk), objektumot törölünk (ismét sérül az 1.2.1. tétel 2. és 3. feltétele).

Az 1.2.1. tétel szerint az egyszerűség  $(\mathcal{S}, 2, 1, B)$  képeken eldönthető a kérdéses pixel  $3 \times 3$ -as lokális környezetének vizsgálatával. Az 1.9. ábra néhány egyszerű és nem egyszerű pixelre mutat példát.

A  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képek egyszerű voxeleinek jellemzésére Bertrand és Malandain eredményét ismertetem.

**1.2.2. tétel.** [5] *A  $p \in B$  voxel akkor és csak akkor egyszerű a  $(\mathcal{C}, 3, 1, B)$  képen, ha az alábbi három feltétel teljesül:*

1. *A  $p$  voxel határpont (vagyis  $N_1^{*c}(p) \cap \overline{B} \neq \emptyset$ ).*
2. *Pontosan egy fekete 3-komponens található az  $N_3^{*c}(p) \cap B$  halmazban.*
3. *A  $p$  voxel bármely két fehér 1-szomszédja 1-összefüggő az  $N_2^{*c}(p) \cap \overline{B}$  halmazban.*

Az 1.2.2. tétel szerint a  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képeken egy voxel egyszerűsége eldönthető a kérdéses voxel  $3 \times 3 \times 3$ -as lokális környezete alapján. Egyszerű és nem egyszerű voxelekre az 1.10. ábra ad néhány példát.

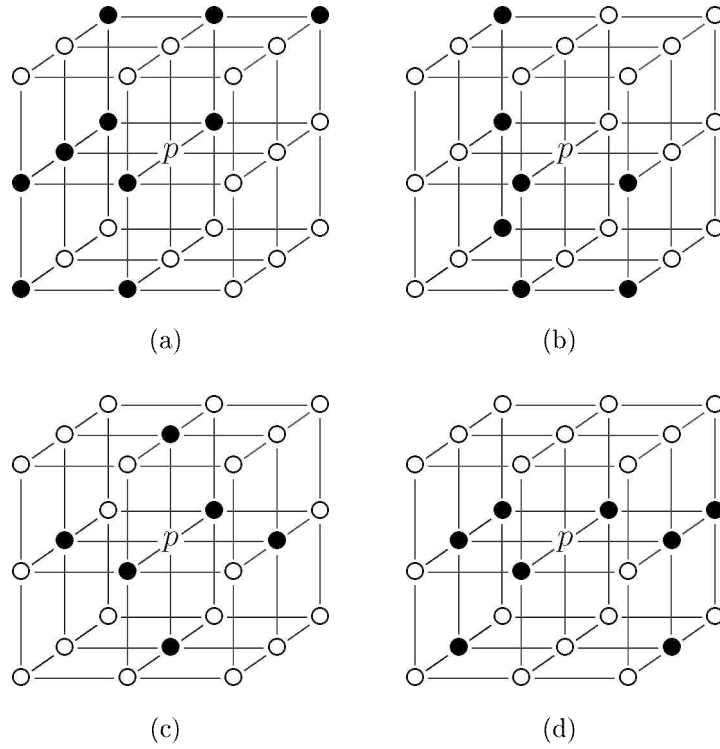
**1.2.1. megjegyzés.** *Az egyszerűség lokális voltát az ortogonális képrácsokra (és a velük duális mozaikokra) tetszőleges dimenziókra bizonyították [48]-ban.*

Az  $(\mathcal{S}, 1, 2)$  és a  $(\mathcal{C}, 1, 3)$  képeken a képelemek egyszerűsége az  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  és a  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  esetekre visszavezetve ellenőrizhető az alábbi dualitási szabály segítségével.

**1.2.3. tétel.** [31] *A  $p \in B$  képelem az  $(\mathcal{S}, 1, 2, B)$  ill. a  $(\mathcal{C}, 1, 3, B)$  képen egyszerű akkor és csak akkor, ha  $p$  egyszerű képelem az  $(\mathcal{S}, 2, 1, \mathcal{S} \setminus B)$  ill. a  $(\mathcal{C}, 3, 1, \mathcal{C} \setminus B)$  képen.*

Egyetlen egyszerű képelem törlése – definíció szerint – topológia-megőrző redukció, azonban több elemet tartalmazó képelem-halmazok törlésénél a topológiai korrektség nem mindig áll fenn. Gondoljunk például egy  $2 \times 2$ -es



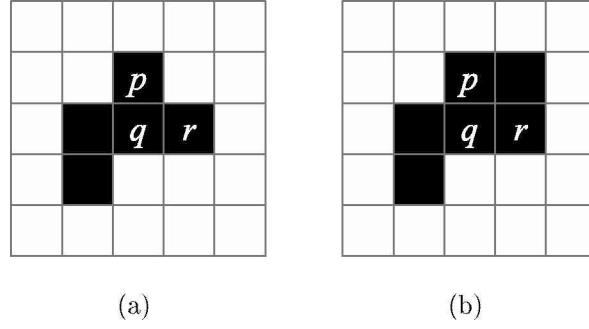


1.10. ábra. Példák egyszerű (a) és nem-egyszerű (b-d) pontokra  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képen. A (b-d) ábrákon  $p$  törlésével rendre az alábbi jelenségek lépnek fel: egy objektum két részre szakad (1.2.2. tétel 2. feltétele nem teljesül), egy új üreg keletkezik (1.2.2. tétel 1. feltétele sérül), új lyuk keletkezik (a (d) konfiguráció az 1.2.2. tétel 3. feltételét nem elégíti ki)

négyzet alakú objektumot tartalmazó  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  vagy  $(\mathcal{S}, 1, 2)$  képre: ezen fekete komponensnek mind a négy pixele egyszerű, ám e pontok törlésével egyben egy objektumot is eltávolítottunk a képről, amely sérti az 1.2.1. kritérium 2. feltételét. A redukciók topológia-megőrzésére változatos elegendő (de nem szükséges) feltételeket fogalmaztak meg [2, 31, 40, 68, 73].

Ezen eredmények áttekintése előtt tisztáznunk kell az egyszerű halmazok fogalmát. Mivel ezt a későbbiekben addíciók kapcsán is használni fogjuk, így a [40]-ben a redukciókra bevezetett egyszerű halmaz fogalom olyan változatát adjuk meg, hogy az tetszőleges képműveletre is értelmezhető legyen. Az  $S \subset V$  képelem-halmaz *egyszerű halmaz* a  $\mathcal{P} = (V, k, \bar{k}, B)$  képen, ha létezik  $S$  elemeinek egy olyan  $\langle p_1, p_2, \dots, p_t \rangle$  sorozata, hogy  $p_1$  egyszerű a  $\mathcal{P}$  képen, és  $p_i$  egyszerű azon a képen, amelyet úgy kapunk, hogy a  $\mathcal{P}$  képen átszínezzük a  $\{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}\}$  halmaz elemeit ( $i = 2, \dots, t$ ). Az üres képelem-halmaz – definíció szerint – egyszerű.

Az egyszerű- és a nem-egyszerű halmazok közötti különbséget az 1.11. ábra példái szemléltetik. Az 1.11(a) ábrán a  $\{p, q, r\}$  halmaz egyszerű, hiszen például a  $\langle p, r, q \rangle$  sorozat megfelel az egyszerű halmaz definíciójában megfogalmazott feltételnek. Ugyanez a halmaz azonban az 1.11(b) ábrán már nem-egyszerű,



1.11. ábra. Példa egyszerű (a) és nem-egyszerű (b)  $\{p, q, r\}$  halmazra

mert a  $p$ ,  $q$ , és  $r$  pixelek valamennyi lehetséges sorrendjének megfelelő sorozata sérti az előbbi definícióban szereplő feltételt. Az alábbi összefüggés rámutat az egyszerű halmazok kulcsszerepére a topológia-megőrzésében.

**1.2.4. tétel.** [31] *Egy redukció akkor és csakis akkor topológia-megőrző, ha bármely képre az általa törölt képelemek halmaza egyszerű.*

**1.2.2. megjegyzés.** *Az egyszerű halmazok definíciója szerint könnyen belátható az, hogy az 1.2.4. tétel elegendő feltétele egyben szükséges is a topológia-megőrzéshez. Továbbá a fenti tétel az egyszerű halmazok általánosabb definíciója mellett nem csak redukciókra, hanem tetszőleges képműveletre megfogalmazható (ha a törölt képelemek helyett átszínezett képelemekről beszélünk).*

Ronse  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  és az  $(\mathcal{S}, 1, 2)$  képekre dolgozott ki elegendő feltételeket.

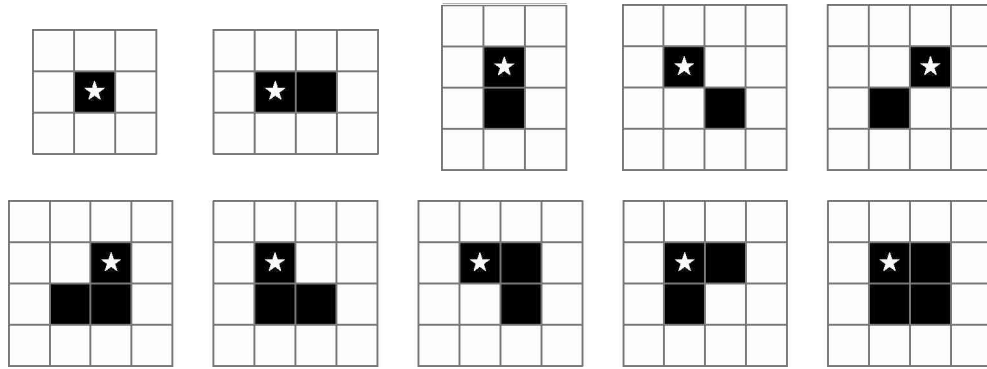
**1.2.5. tétel.** [40,73] *Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha valamennyi  $(\mathcal{S}, k, \bar{k})$  képre  $((k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$  teljesülnek az alábbi feltételek.*

1. *Valamennyi  $\mathcal{R}$  által törölt pixel egyszerű.*
2. *Valamennyi  $\mathcal{R}$  által törölt, egymással  $\bar{k}$ -szomszédos pixelpár (lásd az 1.4 ill. az 1.5. ábrákat) egyszerű halmazt alkot.*
3. *Ha  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$ , akkor  $\mathcal{R}$  nem töröl teljesen egyetlen kis objektumot sem (lásd az 1.7. ábrát).*

Ma hasonló feltételeket dolgozott ki a  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  és a  $(\mathcal{C}, 1, 3)$  képek redukcióira. Eredményei ismertetése előtt egy további definíció bevezetése szükséges: a  $\mathcal{C}$  mozaikon a három, egymással páronként 2-szomszédos de nem 1-szomszédos voxelből álló halmazt *átlós háromszögnek* nevezzük.

**1.2.6. tétel.** [40] *Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $(\mathcal{C}, 3, 1, B)$  képre teljesülnek az alábbi feltételek.*

1. *Valamennyi  $\mathcal{R}$  által törölt 2D egység-elembe foglalható voxelhalmaz egyszerű.*



1.12. ábra. Az egység-négyzetbe befoglalható lehetséges objektumok. A ★ szimbólummal jelölt pixelek az objektumok kitüntetett elemei.

2.  $\mathcal{R}$  nem töröl teljesen egyetlen 3D egység-elembe foglalható objektumot sem.

**1.2.7. tétel.** [40] Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $(\mathcal{C}, 1, 3)$  képre teljesülnek az alábbi feltételek.

1. Bármely  $\mathcal{R}$  által törölt vözelekből álló legfeljebb két elemű halmaz egyszerű.
2. Bármely  $\mathcal{R}$  által törölt, átlós háromszögbe foglalható halmaz egyszerű.

A 1.2.5-1.2.7. tételek csupán elegendő (de nem szükséges) feltételeket fogalmaznak meg, amelyek a törölt képelemek bizonyos konfigurációit vizsgálják. Az említett tételek ezért csupán a redukciók topológia-megőrző voltának igazolására alkalmazhatók. Németh és Palágyi számos olyan elegendő feltételt dolgozott ki, amelyek a korábbiakkal szemben egyedi képelemek törlését vizsgálják, ezáltal nem csupán redukciók topológia-megőrzése validálható a segítségükkel, hanem topológiailag korrekt párhuzamos vékonyító algoritmusok is származtathatóak belőlük [53, 55, 59, 60, 61, 69]. Feltételeiket két csoportba, az ún. szimmetrikusba és aszimmetrikusba sorolták: a szimmetrikusak nem tüntetik ki bizonyos pontkonfigurációk valamely elemét, míg az aszimmetrikusak igen. Alább kettő-kettő eredmény szerepel 2D és 3D redukciókra, közülük az 1.2.8. és az 1.2.10. tételek szimmetrikusak, az 1.2.9. és az 1.2.11. tételek aszimmetrikusak. A 3D esetekre vonatkozó tételek az ún. kiterjedt kis objektumok fogalmát is használják: egy  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  kép valamely objektuma *kiterjedt kis objektum*, ha befoglalható egy 3D egység-elembe, de nem foglalható be egyetlen 2D egység-elembe sem.

**1.2.8. tétel.** [59, 61] Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $(\mathcal{S}, 2, 1, B)$  képre és annak bármely  $\mathcal{R}$  által törölt  $p \in B$  pixelére teljesül az alábbi három feltétel:

1.  $p$  egyszerű pixel az  $(\mathcal{S}, 2, 1, B)$  képen.
2. Valamennyi  $q \in N_1^{\mathcal{S}}(p) \cap B$  egyszerű pixelre  $p$  egyszerű az  $(\mathcal{S}, 2, 1, B \setminus \{q\})$  képen, vagy  $q$  egyszerű az  $(\mathcal{S}, 2, 1, B \setminus \{p\})$  képen.
3. A  $p$  pixel nem eleme az 1.12. ábrán látható egyik objektumnak sem.

**1.2.9. tétel.** [55, 60] Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $(\mathcal{S}, 2, 1, B)$  képre és annak bármely  $\mathcal{R}$  által törölt  $p \in B$  pixelére teljesül az alábbi három feltétel:

1.  $p$  egyszerű pixel az  $(\mathcal{S}, 2, 1, B)$  képen.
2. Bármely  $q \in N_1^{\mathcal{S}}(p) \cap B$  egyszerű pixelre  $p$  egyszerű az  $(\mathcal{S}, 2, 1, B \setminus \{q\})$  képen, vagy  $q$  egyszerű az  $(\mathcal{S}, 2, 1, B \setminus \{p\})$  képen vagy  $q$  az 1.4. ábra valamely konfigurációjában a kitüntetett elem.
3. A  $p$  pixel nem a  $\star$  szimbólummal jelölt eleme az 1.12. ábrán látható egyik objektumnak sem.

**1.2.10. tétel.** [69] Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, 3, 1, B)$  képre és annak bármely  $\mathcal{R}$  által törölt  $p \in B$  voxelére teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Valamennyi olyan egyszerű voxelekből álló  $Q \subseteq B$  halmazra, mely tartalmazza  $p$ -t és része egy  $2D$  egység-elemnek,  $p$  egyszerű a  $(\mathcal{C}, 3, 1, (B \setminus Q) \cup p)$  képen.
2. A  $p$  pixel nem eleme egyetlen kiterjedt kis objektumnak sem.

**1.2.11. tétel.** [53] Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, 3, 1, B)$  képre és annak bármely  $\mathcal{R}$  által törölt  $p \in B$  voxelére teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Valamennyi olyan egyszerű voxelekből álló  $Q \subseteq B$  halmazra, melynek  $p$  a legkisebb eleme a pontkoordináták lexicografikus rendezése szerint a  $\mathcal{C}$ -vel duális  $\mathbb{Z}^3$  rácson és része egy egység-négyzetnek,  $p$  egyszerű voxel a  $(\mathcal{C}, 3, 1, (B \setminus Q) \cup \{p\})$  képen.
2. A  $p$  voxel egyetlen kiterjedt objektumnak sem a legkisebb eleme a pontkoordináták lexicografikus rendezése szerint a  $\mathcal{C}$ -vel duális  $\mathbb{Z}^3$  rácson.

## 2. fejezet

# A váz fogalma és a vázkijelölés módszerei

Az alábbiakban bemutatom a folytonos vázat és a digitális képeken a vázkijelöléssel szemben támasztott elvárásokat. Az általános vázkijelölő eljárások közül részletesen kitérek a vékonyításra, amely jelen dolgozat középpontjában áll.

### 2.1. A váz és a vázkijelölés

A váz fogalmát Blum vezette be, mint a *középtengely-transzformáció* (*medial-axis transform, MAT*) eredményét [6]. Ezen eljárás során az objektumok minden egyes pontjához megkeressük a hozzá legközelebb eső határponto(ka)t. Ha valamely belső ponthoz egynél több legközelebbi határpontot találunk, akkor az illető pont a vázhoz tartozik. A vázra Blum egy szemléletes definíciót is adott a *préritűz-hasonlással*: ha az objektum határának minden pontjában egyszerre tüzet gyújtunk, és a tűzfrontok minden irányban egyenletes sebességgel terjednek, akkor a váz azon pontok mértani helye, ahol a tűzfrontok találkoznak és kioltják egymást.

Calabi a vázat formálisan definiálta tetszőleges dimenzióra az objektumban beírható maximális hipergömbök középpontjainak halmazaként [7]. Egy hipergömb az objektumba beírható, ha részhalmaza az objektumnak, valamint maximális is, ha nem foglalható egyetlen más beírható hipergömbbe sem. Mivel a hipergömbök (2D-ben a körlapok, 3D-ben a gömbök) értelmezettek tetszőleges dimenzióban, így a váz is definiálható tetszőleges dimenzióban.

Könnyen belátható, hogy a fenti három definíció ugyanazt a struktúrát írja le.

Diszkrét esetben a (folytonos) váz helyett az ún. vázszerű jellemzők meghatározása a cél. A 2D objektumok két vázszerű alakjellemzője a *középvonal* és a *topológiai mag*. A középvonal a folytonos váz közelítésére szolgál, míg egy topológiai mag topológia-megőrző redukcióval áll elő a kiindulási objektumból és nem tartalmaz egyszerű pontot. 3D esetben ezek mellett további ilyen alak-

jellemző a *középfelszín* is, ami a folytonos 3D vázat közelíti, mivel a 3D vázak 2D felszín-szegmenseket is tartalmazhatnak.

A *vázkijelölés* digitális képek objektumaira határoz meg vázszerű jellemzőket. Az alábbi négy fő elvárást fogalmazták meg a vázkijelölő eljárásokkal szemben.

- Legfontosabb a topológia megőrzése, azaz a vázszerű jellemzőnek topologikusan ekvivalensnek kell lennie a kiindulási objektummal.
- A vázkijelölő eljárásnak ideális esetben 1 pixel/voxel vékony struktúrát kell eredményeznie.
- A váznak az objektum közepén kell elhelyezkednie.
- Végül teljesülnie kell az ún. *gyengített izotrópia-kritérium*nak, mely szerint a vázkijelölő eljárásnak invariánsnak kell lennie a 90, 180 és 270 fokos elforgatásokra.

Megjegyzem, hogy fenti elvárások egymás ellen hatnak. Például egy páros pixel oldalhosszúságú négyzetben nincs középső képelem, ezért a „középen való elhelyezkedés” sérül. Továbbá például egy páros pixel magasságú téglalap 1 pixel vékony középvonalában a vízszintes szegmens a téglalap alsó és felső határa közül az egyikhez 1 pixellel közelebb esik, így ekkor nyilván a 180 fokos forgatási invariancia nem teljesülhet. Az elvárások valamennyi ellentmondásának feltárása túlfeszítené a dolgozat kereteit.

A vázszerű jellemzők kinyerésére javasolt algoritmusok többsége távolság-transzformáción, Voronoi-diagramon vagy vékonyításon alapul. Ezekről a technikákról és számos egyéb vázkijelölő módszerről részletes áttekintést nyújt a Siddiqi és Pizer által szerkesztett kézikönyv [77]. Dolgozatomban csak a vékonyítást tárgyalom, mivel az a leggyorsabb vázkijelölő technika, alkalmas valamennyi vázszerű jellemző meghatározására és számos alkalmazás igényeit kielégítő jellemzőket képes produkálni.

## 2.2. Vékonyítás

A vékonyítás (mint a leggyakrabban alkalmazott vázkijelölő módszer) iteratív objektum-redukció, melynek egy lépésében az aktuális objektum határpontjai közül a törölhetőnek minősítetteket távolítjuk el. Az eljárás terminál, ha az objektumon már nincs több törölhető pont. A vékonyító algoritmusok a pontok törölhetőségét azok egy lokális környezete, a *vizsgált környezet* (*support*) alapján döntenek el [16]. A törlési feltételektől függően különböző vázszerű jellemzőket kaphatunk. Ha ezen kritériumok csupán a topológia-megőrzést biztosítják, akkor a vékonyító algoritmus a bemeneti objektumok topológiai magját állítja elő. Ez esetben redukciós zsugorításról beszélünk [17]. Ha a törlési feltételekbe bizonyos geometriai kényszerfeltételeket is beépítünk, úgy 2D és 3D

képek esetén középvonalhoz, valamint az utóbbiaknál középfelszínhez is juthatunk. Ehhez hagyományosan olyan kényszerfeltételek használatosak, amelyek megőrzik az objektumok *vonalt*- ill. *felszín-végpontjait*. Végpontok alatt olyan egyszerű pontokat értünk, amelyek valamilyen releváns geometriai információt hordoznak. Mivel a topológia-megőrzés miatt a végpontoknak kapcsolódnia kell a középvonalhoz ill. a középfelszínhez, így azok megjelenése a vékonyítás valamely fázisában szükségképpen egy-egy szegmenst eredményez a vázszerű jellemzőn. A hagyományostól eltérő vékonyító stratégiát javasolt Bertrand és Couprie [4], akik geometriai kényszerfeltételként a végpontok levédése helyett az ún. *szűkületi pontok* megtartását javasolták. Ezen kitüntetett képelemek, szemben az egyszerű végpontokkal, bizonyos nem-egyszerű határpontok közül kerülnek ki, és a vékonyítás hátralévő fázisaiban már nem törölhetők, így elemei lesznek a kapott vázszerű jellemzőnek.

Attól függően, hogy egyszerre egy vagy több határpont törléséről döntünk, megkülönböztethetünk szekvenciális és párhuzamos vékonyító technikákat [16, 79]. Az alábbiakban ezen sémák jellemzőit foglaljuk össze.

### 2.2.1. Szekvenciális vékonyítás

A szekvenciális vékonyító algoritmusok előre meghatározott sorrendben járnak be és törlik a feltételeiket kielégítő határpontokat. Bár a határpontok meglatogatása többféle bejárás sorrendben is történhet, a szekvenciális vékonyító eljárások általánosan felírhatók a 2.1. algoritmus szerinti sémában [79]. A vékonyítás első fázisában az algoritmusok megjelölik a határpontokat az aktuális képen. A második fázisban csak ezen megjelölt pontokat látogatják meg ismét, és az aktuálisan ellenőrzött pontot törlik, ha az teljesíti a törlési feltételt. A hagyományos szekvenciális vékonyító algoritmusok érzékenyek a pontok bejárás sorrendjére. Az ún. bejárás-független szekvenciális technikák – amelyekkel a 6. fejezet foglalkozik, – kiküszöbölik ezt a problémát.

### 2.2.2. Párhuzamos vékonyítás

Mivel a tűzfrontok terjedése párhuzamos folyamat, így a javasolt vékonyító algoritmusok többsége is párhuzamos. Ezen algoritmusok három fő változatát különböztethetjük meg: a teljesen párhuzamos, az irány-alapú, ill. az almező alapú eljárásokat [16]. A párhuzamos vékonyító stratégiák bemutatásakor 2D esetén a négyzet-mozaikot, 3D-nél pedig a kocka-mozaikot tételeztem fel. A dolgozat eredményeihez tartozó háromszög- és hatszög-mozaikokon dolgozó algoritmusokat a 4. fejezetben mutatom be.

#### Teljesen párhuzamos algoritmusok

A párhuzamos módszerek közül a teljesen párhuzamos vékonyító technika szemathelyezhető a legegyszerűbben (lásd 2.2. algoritmus): az ezen stratégiát követő algoritmusok egy iterációs lépése során mindössze egyetlen redukció hajtodik

**2.1. algoritmus.** A szekvenciális vékonyítás.

---

```

1: Input: a  $(V, k, \bar{k}, X)$  kép
2: Output: a  $(V, k, \bar{k}, Y)$  kép
3:  $Y = X$ 
4: repeat
5:   // egy iterációs lépés
6:   // első fázis: kontúr-követés
7:   deleted = false
8:    $S = \{ p \mid p \in Y \text{ egyszerű képelem} \}$ 
9:   // második fázis: redukció
10:  for all  $p \in S$  do
11:    if  $p$  az  $Y$  halmaz „törölhető” eleme then
12:       $Y = Y \setminus \{p\}$ 
13:      deleted = true
14: until deleted = false

```

---

végre, melynek során valamennyi törölhetőnek minősülő képelem egyidejűleg törlődik [16]. A topológiai korrektség biztosítása ekkor igen nagy körültekintést igényel, hiszen egy redukció akkor sem feltétlenül topológia-megőrző, ha csupán egyszerű pontokat töröl. Például egy 2-pixel vastagságú vízszintes egyenesnek bármely pixele egyszerű, de ha ezeket egyidejűleg törölnénk, a teljes objektumot eltüntetnénk. Rosenfeld rámutatott arra, hogy nem konstruálható 2D képeken olyan teljesen párhuzamos zsugorító algoritmus, aminek a törlési szabálya csupán a pixelek  $3 \times 3$ -as környezetét vizsgálja [74]. Hasonló tulajdonság igazolható 3D-ben a  $3 \times 3 \times 3$ -as vizsgált környezetre. Egy lehetséges megoldás lehet tehát az, ha a  $3 \times 3$ -asnál (vagy  $3 \times 3 \times 3$ -asnál) nagyobb vizsgált környezetet határozunk meg. Az ezen elgondolást követő 2D teljesen párhuzamos vékonyító algoritmusok vizsgált környezetének mérete rendszerint nem nagyobb az  $5 \times 5$ -ösnél [15, 46, 47, 75, 83], míg a 3D teljesen párhuzamos vékonyító eljárásokhoz az  $5 \times 5 \times 5$ -öst nem meghaladó méretű vizsgált környezet tartozik [38, 41, 42, 64, 82].

**2.2. algoritmus.** A teljesen párhuzamos vékonyítás.

---

```

1: Input: a  $(V, k, \bar{k}, X)$  kép
2: Output: a  $(V, k, \bar{k}, Y)$  kép
3:  $Y = X$ 
4: repeat
5:   // egy iterációs lépés
6:    $D = \{ p \mid p \text{ az } Y \text{ halmaz „törölhető” képeleme} \}$ 
7:    $Y = Y \setminus D$ 
8: until  $D = \emptyset$ 

```

---

A teljesen párhuzamos algoritmusok tehát az egyszerűség eldöntésénél bővebb vizsgált környezetet igényelnek, így a törlési feltételeket megadó Boole-



függvények „sokváltozósak”, így időigényes a kiértékelésük és 3D-ben nem is tárolhatók keresőtáblákban. Ezt a hátrányt hivatottak kiküszöbölni olyan stratégiák, amelyek a vékonyítás egy-egy iterációját több aliterációra bontják. Az egyes aliterációk egy-egy olyan kisebb (többnyire  $3 \times 3$ -as ill.  $3 \times 3 \times 3$ -as) vizsgált környezettel dolgozó redukció végrehajtását jelentik, amire a topológiamegőrzés már egyszerűbben garantálható. A következőkben tárgyalásra kerülő két megközelítés ilyen elven alapul.

### Irány-alapú algoritmusok

Az irány-alapú eljárások egyes aliterációiban csak adott irányú határpontokat ellenőrzünk. Egy iterációs lépés során egymást követően  $l \geq 2$  redukciót alkalmazunk, melyek szekvenciáját az algoritmusra jellemző  $\langle d_1, \dots, d_l \rangle$  törlési irány-sorozat határozza meg (lásd 2.3. algoritmus) [16].  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képeken négy, a  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képeken pedig hat fő irányt különböztetünk meg a 2.1. ábrán látható módon, ahol  $N_1^{\mathcal{S}}(p)$  elemeit az  $N, E, S$  és  $W$ ,  $N_1^{\mathcal{C}}(p)$  elemeit pedig az  $N, S, W, E, U, D$  betűkkel jelöltük. A  $p$  objektumpont  $N$ -határpixel egy  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képen, ha az  $N$ -nel jelölt 1-szomszédja fehér (lásd 2.1(a) ábra). Az  $S$ -, a  $W$ - és az  $E$ -határpixelek is hasonlóan definiálhatók. Továbbá a  $p$  fekete pixel  $NE$ -határpixel, ha az  $N$  vagy az  $E$  szomszédja fehér (lásd 2.1. ábra). Az  $NW$ -, az  $SE$ - és az  $SW$ -határpixelek az előbbivel analóg módon definiálhatók. Az  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képekhez hasonlóan kategorizálhatjuk a különböző típusú határvoxeleket a  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képeken is.

---

#### 2.3. algoritmus. Irány-alapú $l$ -aliterációs vékonyítás.

---

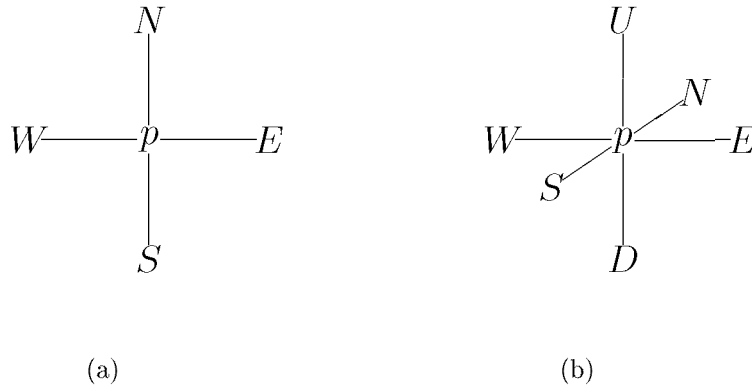
```

1: Input: a  $(V, k, \bar{k}, X)$  kép és a törlési irányok egy  $\langle d_1, \dots, d_l \rangle$  sorozata
2: Output: a  $(V, k, \bar{k}, Y)$  kép
3:  $Y = X$ 
4: repeat
5:   // egy iteráció
6:    $D = \emptyset$ 
7:   for  $i = 1$  to  $l$  do
8:     // egy aliteráció
9:      $D_i = \{p \mid p \text{ } d_i\text{-határelem és az } Y \text{ halmaz „törölhető” eleme} \}$ 
10:     $Y = Y \setminus D_i$ 
11:     $D = D \cup D_i$ 
12: until  $D = \emptyset$ 
```

---

Legegyszerűbb esetben minden aliterációhoz hozzárendelhetünk egy-egy főirányt. A törlési irányok sorozata ekkor 2D-ben  $\langle N, S, W, E \rangle$ , 3D-ben pedig  $\langle N, S, W, E, U, D \rangle$  (vagy ezek valamely permutációja), azaz adott aliteráció során csak az aktuális irány szerinti határpixelek törlését engedélyezzük, eképpen 2D-ben 4-, 3D-ben pedig 6-irányú vékonyító algoritmusokhoz jutunk. (Megjegyezzük, hogy a vékonyítás eredménye függ a törlési irányok sorrendjének megválasztásától.)

Az előbbiektől eltérő módon is szervezhetjük az eljárás egy iterációs lépését, nevezetesen ha egy-egy aliterációban kettő (ill. 3D-ben akár három) irányból is megengedjük a határpontok törlését. Eképpen 2D-ben 2-, és 8-aliterációs, 3D-ben pedig 3-, 8-, és 12-aliterációs változatokat is javasoltak. A 2-aliterációs 2D algoritmusoknál az  $\langle NE, SW \rangle$  és  $\langle NW, SE \rangle$  [8,14,39,85], valamint 8-aliterációs algoritmusoknál az  $\langle N, NE, E, SE, S, SW, W, NW \rangle$  [46,47] a törlési irányok leggyakrabban alkalmazott sorrendje. 3D-ben 3-aliterációs algoritmusok esetén a törlési irányok az  $\langle UD, NS, EW \rangle$  sorrendet követik [62,63,65], a 6-aliterációs változatoknál az  $\langle U, D, N, E, S, W \rangle$  sorrendet javasolták [1,12,33,35,37,51,66,81], a 8 fázisból álló algoritmusokban az  $\langle USW, DNE, USE, DNW, UNE, DSW, UNW, DSE \rangle$  [67], míg a 12 irányból törlő algoritmusoknál  $\langle US, NE, WD, ES, UW, ND, SW, UN, ED, NW, UE, SD \rangle$  séma szerint követik egymást a törlési irányok [34,36,68]. Az aliterációs vékonyító algoritmusok minden aliterációjukban más és más törlési szabályt alkalmaznak, de azok Boole-függvényei megkaphatók egymásból a változóik alkalmas permutációival. Ennélfogva elegendő egy kitüntetett irány (aliteráció) törlési szabályát vagy keresőtábláját megadni.



2.1. ábra. A fő irányok, amelyek megfeleltethetők az  $\mathcal{S}$  négyzetmozaikon (a) és a  $\mathcal{C}$  kockamozaikonon (b) a  $p$  képelem 1-szomszédainak.

### Almező-alapú algoritmusok

Az almező-alapú stratégia a képelemek  $V$  halmazának diszjunkt részhalmazokra, ún. almezőkre történő particionálásán alapul, ahol a  $t$  almezőből az  $i$ -ediket jelölje  $SF_t^V(i)$  ( $i = 0, 1, \dots, t-1; t \geq 2$ ). Az ezen elven működő algoritmusok egy iterációs lépése során az almezőket egymás után aktiváljuk, és az adott aliterációban csak az aktív almezőbe eső pontokat vizsgáljuk. Általános sémájukat a 2.4. algoritmus foglalja össze [16].

$(\mathcal{S}, 2, 1)$  képekre 2-almezős [11,14] valamint 4-almezős algoritmusokat [52,71] javasoltak, míg  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képeken az almezők száma jellemzően kettő [43,44], négy [45], ill. nyolc [3].

**2.4. algoritmus.** Almező-alapú vékonyítás  $t$  almezővel

---

```

1: Input: a  $(V, k, \bar{k}, X)$  kép
2: Output: a  $(V, k, \bar{k}, Y)$  kép
3:  $Y = X$ 
4: repeat
5:   // egy iteráció
6:    $D = \emptyset$ 
7:   for  $i = 0$  to  $t - 1$  do
8:     // egy aliteráció
9:      $D_i = \{p \mid p \text{ az } SF_t^V(i) \cap Y \text{ halmaz „törölhető” eleme} \}$ 
10:     $Y = Y \setminus D_i$ 
11:     $D = D \cup D_i$ 
12: until  $D = \emptyset$ 

```

---

Az  $\mathcal{S}$  négyzetmozaik  $SF_t^{\mathcal{S}}(i)$  ( $t = 2, 4; i = 0, \dots, t - 1$ ) almezőit és a  $\mathcal{C}$  kockamozaik partícionálását az  $SF_t^{\mathcal{C}}(i)$  ( $t = 2, 4, 8; i = 0, \dots, t - 1$ ) almezőkre az alábbi formulákkal írjuk le a duális rácsok pontkoordinátái segítségével:

$$SF_2^{\mathcal{S}}(i) = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x + y) \bmod 2 = i \}$$

$$SF_4^{\mathcal{S}}(i) = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2(y \bmod 2) + x \bmod 2 = i \}$$

$$SF_2^{\mathcal{C}}(i) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid (x + y + z) \bmod 2 = i \}$$

$$SF_4^{\mathcal{C}}(i) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 2((z + y) \bmod 2) + (y + x) \bmod 2 = i \}$$

$$SF_8^{\mathcal{C}}(i) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4(z \bmod 2) + 2(y \bmod 2) + x \bmod 2 = i \}$$

Az almezős felbontásnak köszönhetően az aktív almezőbe eső objektum-pontok néhány vagy összes szomszédja „védett” marad a törléssel szemben az aktuális aliterációban, ami megkönnyíti a topológiai korrektség biztosítását. Minél nagyobb az almezők száma, annál több olyan kritérium teljesülése garantált, amelyet a topológiai korrektség megkíván. A létező almezős algoritmusok egyetlen (globális) törlési szabállyal operálnak.

**2.2.3. Szűkületi pontok megtartásán alapuló vékonyítás**

Mind a szekvenciális, mind a párhuzamos vékonyításra létezik az előző két alfejezetben bemutatottaktól eltérő megközelítés, amit Bertrand és Couprie javasolt az ún. szűkületi pontok összegyűjtésével [4].

A vékonyítás adott fázisában a szűkületi pontnak minősített képelemek egy, a megőrzendő képelemek halmazába kerülnek, és azok törölhetőségét a későbbiekben sem vizsgálják. Így valamennyi szűkületi pont eleme lesz az eredményül kapott vázszerű jellemzőnek. Itt csak a szekvenciális és teljesen párhuzamos eljárások ezen változatát mutatom be a 2.5. és a 2.6. algoritmusokkal, de az

irány- és almező-alapú megközelítésekre is hasonló módon írhatóak fel a szűkületi pont-alapú variánsok. Bár az alább bemutatott két algoritmus elején a szűkületi pontok  $I$  halmaza üres, azt úgy is inicializálhatjuk, hogy az a vékonyítást megelőzően összegyűjtött jellemző-pontokat tartalmazza.

---

**2.5. algoritmus.** Szűkületi pontokat gyűjtő szekvenciális vékonyítás.

---

```

1: Input: a  $(V, k, \bar{k}, X)$  kép
2: Output: a  $(V, k, \bar{k}, Y)$  kép
3:  $Y = X$ 
4:  $I = \emptyset$ 
5:  $S = \emptyset$ 
6: repeat
7:   // első fázis: kontúr-követés
8:   for all  $p \in Y \setminus I$  do
9:     if  $p$  egyszerű pont az  $Y$  halmazon then
10:       $S = S \cup \{p\}$ 
11:     else if  $p$  szűkületi pont az  $Y$  halmazon then
12:        $I = I \cup \{p\}$ 
13:   // második fázis: redukció
14:   deleted = false
15:   for all  $p \in S$  do
16:     if  $p$  „törölhető” then
17:        $Y = Y \setminus \{p\}$ 
18:       deleted = true
19: until deleted = false

```

---



---

**2.6. algoritmus.** Szűkületi pontokat gyűjtő teljesen párhuzamos vékonyítás.

---

```

1: Input: a  $(V, k, \bar{k}, X)$  kép
2: Output: a  $(V, k, \bar{k}, Y)$  kép
3:  $Y = X$ 
4:  $I = \emptyset$ 
5: repeat
6:   // egy iterációs lépés
7:    $I = I \cup \{ p \mid p \in Y \setminus I \text{ és } p \text{ szűkületi pont} \}$ 
8:    $D = \{ p \mid p \in Y \setminus I \text{ és } p \text{ „törölhető”} \}$ 
9:    $Y = Y \setminus D$ 
10: until  $D = \emptyset$ 

```

---

## 3. fejezet

# Topológia-megőrző képműveletek

Az 1.2. fejezetben tárgyalt kritériumok az  $\mathcal{S}$  és a  $\mathcal{C}$  mozaikokon mintavételezett képekre szorítkoznak. Jelen fejezetben az egyszerűség jellemzésére ill. a redukciók topológiai korrektségének vizsgálatára vonatkozó azon, általunk javasolt kritériumokat foglalom össze, amelyek a  $\mathcal{H}$  vagy a  $\mathcal{T}$  mozaikokon mintavételezett képeket feltételeznek. Ezeknek 2D-ben megadom egy-egy általános, mozaiktípustól független változatát is. A fejezet utolsó részében az addíciók topológia-megőrzésével foglalkozom.

### 3.1. Egyszerű pixelek jellemzése

Az  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képeken az egyszerűséget jellemző 1.2.1. és 3.1.2. tételekhez hasonló összefüggéseket dolgoztunk ki a  $(\mathcal{H}, 1, 1)$ , a  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  és a  $(\mathcal{T}, 1, 2)$  képekre. Ezek bemutatása után a kritériumokat általános formában is be fogom bizonyítani.

#### 3.1.1. Egyszerű pixelek $(\mathcal{H}, 1, 1)$ képeken

A  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  képekre az 1.2.1. tétel alábbi változata érvényes.

**3.1.1. tétel.** [23, 24] *Legyen  $p \in B$  a  $(\mathcal{H}, 1, 1, B)$  képnek egy nem-izolált határpixe. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1.  *$p$  egyszerű pixel.*
2.  *$p$  pontosan egy  $N_1^{*\mathcal{H}}(p) \cap B$  halmazbeli 1-komponenssel 1-szomszédos.*
3.  *$p$  pontosan egy  $N_1^{\mathcal{H}}(p) \setminus B$  halmazbeli 1-komponenssel 1-szomszédos.*

Az alábbiakban az egyszerű képelemeknek a fentiekől eltérő jellemzését ismertetem, mely a Kong által bevezetett „csatolt halmaz” fogalmán alapul, és a pixelek egyszerűségét (mint diszkrét képeken eldöntendő tulajdonságot) folytonos halmazok összefüggőségére vezeti vissza [31]. Bár a szerző 2D esetben csak a négyzet-mozaikra vezette be modelljét, az kiterjeszthető úgy, hogy a jelen fejezetben tárgyalt  $\mathcal{H}$  és  $\mathcal{T}$  mozaikokra is érvényes legyen. Ennek ismertetéséhez

azonban további fogalmak bevezetése szükséges. Egy pixel *határán* az éleinek és csúcsainak egyesítésével kapott folytonos ponthalmazt értjük, amit  $U(p)$ -vel jelölünk. Az  $U(p)$  (mint univerzális halmaz) valamely  $S$  részhalmaza *összefüggő*, ha  $S$  bármely két pontja összeköthető olyan görbével, amelynek minden pontját tartalmazza  $S$ . A  $P = (V, k, \bar{k}, B)$  kép  $p \in B$  pixelének  $\mathcal{A}^V(p)$ -vel jelölt csatolt halmaza a következő pontokból áll: ha valamely  $q \in N_1^{*V}(p)$  pixel fekete ( $q \in B$ ), akkor  $\mathcal{A}^V(p)$  tartalmazza azt az élet és azt a két csúcspontot, amelyeken  $p$  és  $q$  osztozik; ha  $q \in N_2^{*V}(p) \setminus N_1^{*V}(p)$ , akkor  $\mathcal{A}^V(p)$ -be vegyük fel azt az egyetlen csúcspontot, amin  $p$  és  $q$  osztozik. Az  $\mathcal{A}^V(p)$  *komplementere* alatt az  $\overline{\mathcal{A}^V(p)} = U(p) \setminus \mathcal{A}^V(p)$  halmazt értjük.

A fenti konstrukcióval az  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képekre az alábbi összefüggés fogalmazható meg:

**3.1.2. tétel.** [31] *Legyen  $\mathcal{P} = (\mathcal{S}, 2, 1, B)$  és  $p \in B$ . A  $p$  pixel akkor és csak akkor egyszerű, ha az  $\mathcal{A}^S(p)$  csatolt halmaz és  $\mathcal{A}^S(p)$  komplementere egyszerre összefüggő és nemüres a  $\mathcal{P}$  képen.*

Kong eredményét  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  képekre [23]-ban adaptáltuk.

**3.1.3. tétel.** [23] *Legyen  $\mathcal{P}$  egy  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  kép, melynek  $p$  egy nem-izolált határpixe. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1.  $p$  egyszerű pixel.
2.  $\mathcal{A}^H(p)$  csatolt halmaz összefüggő és nemüres.
3.  $\overline{\mathcal{A}^H(p)}$  halmaz összefüggő és nemüres.

A 3.1.3. tételre a 3.1. ábra szolgál példákkal.

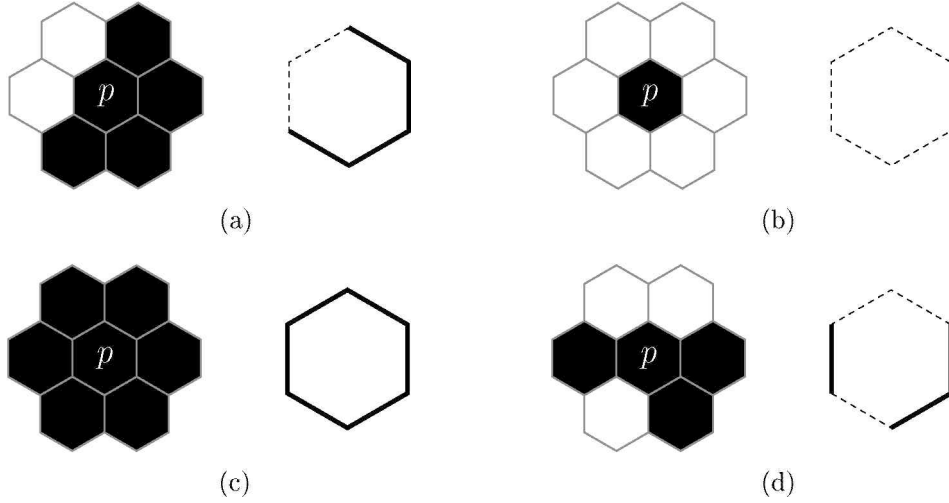
### 3.1.2. Egyszerűség a $(\mathcal{T}, 2, 1)$ és a $(\mathcal{T}, 1, 2)$ képeken

A  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  és a  $(\mathcal{T}, 1, 2)$  képekre a 3.1.1. tételhez hasonló eredményt bizonyítottam:

**3.1.4. tétel.** [28] *A  $(\mathcal{T}, k, \bar{k}, B)$  képnek  $((k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$  egy  $p \in B$  pixele akkor és csak akkor egyszerű, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

1.  $p$  pontosan egy  $N_k^{*V}(p) \cap B$  halmazbeli  $k$ -komponenssel  $k$ -szomszédos.
2.  $p$  pontosan egy  $N_{\bar{k}}^V(p) \setminus B$  halmazbeli  $\bar{k}$ -komponenssel  $\bar{k}$ -szomszédos.

Megfigyelhető, hogy a 3.1.1. tétel 2. és 3. feltételei a figyelembevett szomszédsági relációk típusától eltekintve rendre megegyeznek a 3.1.4. tétel 1. és 2. feltételével. Fontos azonban kihangsúlyozni a két tétel közötti alapvető különbséget: az előbbi szerint a  $p$  pixel egyszerűsége az említett feltételek egyike



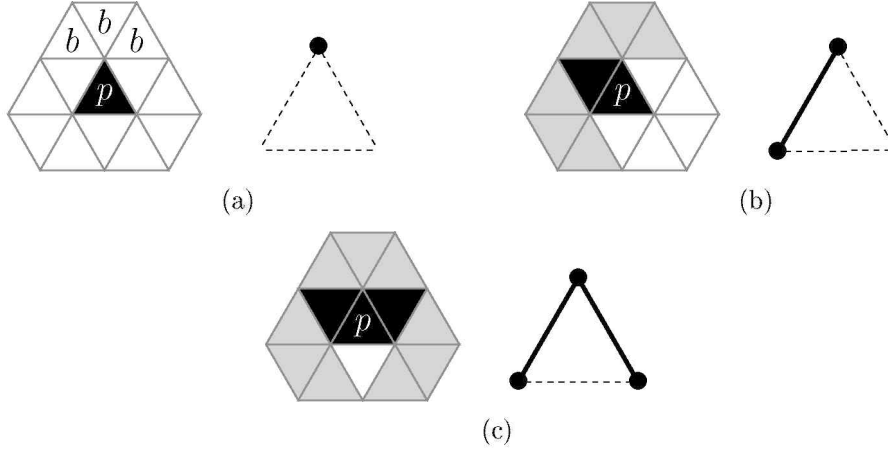
3.1. ábra. Példák  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  képek egyszerű és nem-egyszerű pontjainak konfigurációira, valamint a nekik megfelelő csatolt halmazokra. ( $\mathcal{A}^{\mathcal{H}}(p)$ -hez tartozó éleket vastagított vonalak, míg az  $\overline{\mathcal{A}^{\mathcal{H}}(p)}$  halmazbeli éleket szaggatott vonalak jelölik.)  $p$  csak az (a) ábra szerinti konfiguráción egyszerű a  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  képeken. A (b) ábrán  $p$  izolált pixel, a (c) esetben  $p$  nem határpixel, a (d) ábrán a 3.1.1. tétel 2. és 3. feltételei nem teljesülnek, továbbá  $\mathcal{A}^{\mathcal{H}}(p) = \emptyset$  (b), vagy  $\overline{\mathcal{A}^{\mathcal{H}}(p)} = \emptyset$  (c), vagy pedig sem  $\mathcal{A}^{\mathcal{H}}(p)$ , sem pedig  $\overline{\mathcal{A}^{\mathcal{H}}(p)}$  halmaz nem összefüggő (d).

alapján is eldönthető, míg utóbbi esetben ehhez mindkét kritériumra szükség van.

Az egyszerűség eldöntésére a fenti eredményen kívül a [28]-ben szereplő 2. tétel alapján egy olyan módszer is kínálkozik, amely az előzőnél könnyebben implementálható a  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  ill. a  $(\mathcal{T}, 1, 2)$  képekre: mindkét esetben azt kell megvizsgálnunk, hogy a cikkünkben megadott három-három konfiguráció és azok  $m \cdot 60$  fokos ( $m = 1, 2$ ) elforgatottjai és tükrözöttjei közül illeszkedik-e valamelyikre a kérdéses  $p$  pixel, vagyis az egyszerűség néhány illesztőminta segítségével is eldönthető. A  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képek esetében az említett három konfiguráció csatolt halmazait ábrázolva (lásd 3.2. ábrát) újabb fontos összefüggést állapíthatunk meg.

**3.1.5. tétel.** *Legyen  $\mathcal{P}$  egy  $(\mathcal{T}, 2, 1, B)$  kép, és legyen  $p \in B$ . A  $p$  pixel akkor és csak akkor egyszerű, ha a csatolt halmaza,  $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}(p)$ , és annak komplementere  $\overline{\mathcal{A}^{\mathcal{T}}(p)}$  egyszerre nemüres és összefüggő.*

*Bizonyítás.* A [28]-ben levő 2. tétel alapján  $p$  akkor és csak akkor egyszerű, ha az  $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}(p)$  és  $\overline{\mathcal{A}^{\mathcal{T}}(p)}$  a 3.2. ábrán látható három konfiguráció (ill. azok elforgatottjai és tükrözöttjei) valamelyikének megfeleltethetőek. Látható, hogy a tétel feltételének ez a három konfiguráció eleget tesz, továbbá könnyű ellenőrizni, hogy (az elforgatott és tükrözött változatokat nem számítva) ezeken kívül nem létezik más olyan konfiguráció, amelyre  $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}(p)$  és  $\overline{\mathcal{A}^{\mathcal{T}}(p)}$  egyszerre lenne nemüres és összefüggő.  $\square$



3.2. ábra. A [28]-ban levő 2. tételben vizsgált konfigurációk és csatolt halmazaik. Ezeknek  $m \cdot 60$  fokos elforgatottjai és tükrözöttjei is egyszerű pixeleket határoznak meg ( $m = 1, 2$ ). Az (a) konfigurációban a  $b$ -vel jelölt pozíciók közül legalább az egyiken fekete pixel van, a szürkével színezett pixelek akár fehér, akár fekete pixelek is lehetnek. A csatolt halmazhoz tartozó éleket ill. csúcsokat vastagított vonalak ill.  $\bullet$  szimbólumok, míg a csatolt halmaz komplementerét szaggatott vonalak jelölik.

A  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képek egyszerű pixeleire és csatolt halmazaira mutat néhány konkrét példát a 3.3. ábra. Megjegyzem, hogy a 3.3(c) ábra példája egyben azt is alátámasztja, hogy a  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  esettel ellentétben a 3.1.4. tétel 1. és 2. kritériumai nem feltétlenül csak egyszerre teljesülhetnek.

### 3.1.3. Az egyszerűség általános jellemzése

Nézzük először a 3.1.1. és a 3.1.4. tételek általánosítását.

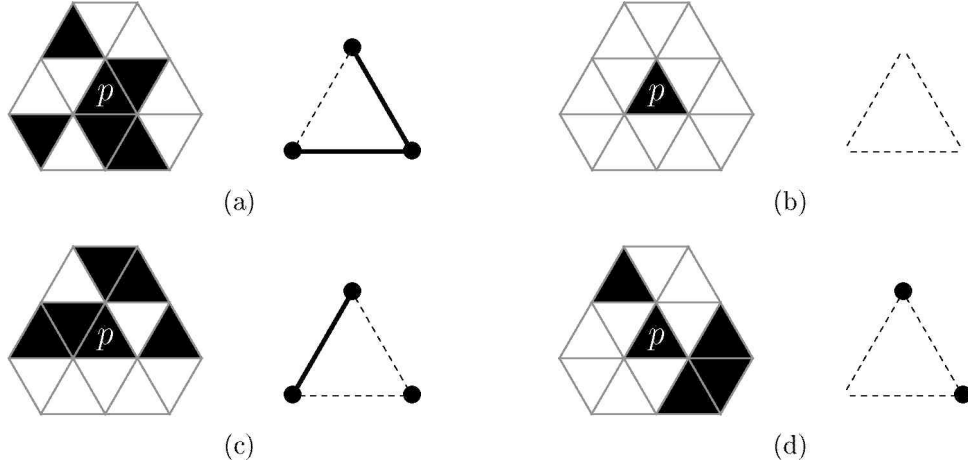
**3.1.6. tétel.** *A  $(V, k, \bar{k}, B)$  képnek  $(V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}, (k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$  egy  $p \in B$  pixele egyszerű akkor és csak akkor, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

1.  $p$  pontosan egy  $N_k^V(p) \cap B$  halmazbeli  $k$ -komponenssel  $k$ -szomszédos.
2.  $p$  pontosan egy  $N_k^V(p) \setminus B$  halmazbeli  $\bar{k}$ -komponenssel  $\bar{k}$ -szomszédos.

*Bizonyítás.* Három esetet kell megkülönböztetni:

- Ha  $V = \mathcal{S}$ , akkor könnyen belátható, hogy  $p$  pixelre az 1. és 2. feltételek akkor és csak akkor teljesülnek, ha  $p$  kielégíti az 1.2.1. tétel feltételeit.
- Ha  $V = \mathcal{H}$ , akkor az 1. és 2. feltételek rendre egybeesnek a 3.1.1. tétel 2. és 3. feltételével.
- Ha  $V = \mathcal{T}$ , akkor az 1. és 2. feltételek rendre egybeesnek a 3.1.4. tétel 1. és 2. feltételével.





3.3. ábra. Példák  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képek egyszerű és nem-egyszerű pontjainak konfigurációira, valamint a nekik megfelelő csatolt halmazokra.  $(\mathcal{A}^T(p))$ -hez tartozó éleket vastagított vonalak, a csúcsokat  $\bullet$  szimbólumok, míg az  $\mathcal{A}^T(p)$  halmazbeli éleket szaggatott vonalak jelölik.)  $p$  csak az (a) ábra szerinti konfiguráción egyszerű a  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képeken. A (b) ábrán a 3.1.4. tétel 1. feltétele nem teljesül, valamint  $\mathcal{A}^T(p) = \emptyset$ . A (c) konfiguráció esetén a 3.1.4. tétel 2. feltétele sérül, és  $\mathcal{A}^T(p)$  halmaz nem összefüggő. Végül a (d) ábrán  $p$  nem teljesíti a 3.1.4. tétel egyik feltételét sem, továbbá sem  $\mathcal{A}^T(p)$ , sem pedig  $\overline{\mathcal{A}^T(p)}$  nem összefüggő.

Tehát tételünk az 1.2.1., a 3.1.1., és a 3.1.4. tételek következménye.  $\square$

A következő tétel az 1.2.3. tételben megfogalmazott,  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  és  $(\mathcal{S}, 1, 2)$  képek között fennálló dualitási szabály általánosítása 2D mozaikokra.

**3.1.7. tétel.** Legyen  $\mathcal{P} = (V, k, \bar{k}, B)$  ( $V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}$ ,  $(k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2)$ ), és legyen  $p \in B$ . A  $p$  pixel akkor és csak akkor egyszerű a  $\mathcal{P}$  képen, ha  $p$  egyszerű a  $\mathcal{P}^{-1} = (V, \bar{k}, k, V \setminus B)$  képen.

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathcal{Q}_k$  a  $\mathcal{P}$  képen a  $p$ -vel  $k$ -szomszédos  $N_k^{*V}(p) \cap B$  halmazbeli  $k$ -komponensek uniója, továbbá  $\mathcal{Q}_{\bar{k}}$  a  $p$ -vel  $\bar{k}$ -szomszédos  $N_{\bar{k}}^{*V}(p) \setminus B$  halmazbeli  $\bar{k}$  komponensek egyesítése. Az inverz kép definíciójából következik, hogy a  $\mathcal{Q}_k$  és a  $\mathcal{Q}_{\bar{k}}$  által lefedett pixel halmaza rendre egybeesik a  $\mathcal{P}^{-1}$  képen a  $p$ -vel  $\bar{k}$ -szomszédos  $N_{\bar{k}}^V(p) \setminus B$ -beli  $\bar{k}$ -komponensek uniója ill. a  $p$ -vel  $k$ -szomszédos  $N_k^{*V}(p) \cap B$  halmazbeli  $k$  komponensek uniója által lefedett pixelekkal. Ezért a 3.1.6. tétel feltételei  $p$ -re csak egyszerre teljesülhetnek a két képen.  $\square$

Következzen ezután (az egyszerű pontok szemléletes jellemzésére szolgáló) csatolt halmazokra kimondott szükséges és elegendő feltételek általánosítása.

**3.1.8. tétel.** Legyen  $\mathcal{P}$  egy  $(V, 2, 1, B)$  kép ( $V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}$ ), melynek  $p$  egy pixel.  $p$  akkor és csak akkor egyszerű, ha az  $\mathcal{A}^V(p)$  csatolt halmaz és  $\overline{\mathcal{A}^V(p)}$  komplementere egyszerre összefüggő és nemüres.

*Bizonyítás.* Három esetet kell ismét megkülönböztetnünk:

- Ha  $V = \mathcal{S}$ , akkor a tételünk egybeesik a 3.1.2. tétellel.
- Ha  $V = \mathcal{H}$ , akkor a 3.1.3. tételben leírt három állítás ekvivalenciájából triviálisan következik a tételünk.
- Ha  $V = \mathcal{T}$ , akkor a tételünk egybeesik a 3.1.5. tétellel.

□

## 3.2. Elegendő feltételek topológia-megőrző redukciókra

Az előző alfejezet sémáját követve előbb a  $(\mathcal{H}, 1, 1)$ , majd pedig a  $(\mathcal{T}, 2, 1)$ , és a  $(\mathcal{T}, 1, 2)$  képek topológia-megőrző redukcióira adott elegendő feltételeket ismertetem, majd ezután általánosítom az eddigi eredményeket.

### 3.2.1. Feltételek $(\mathcal{H}, 1, 1)$ képekre

A hatszög-mozaikon mintavételezett képek topológia-megőrző redukcióira először [24]-ben javasoltunk elegendő feltételeket, majd ezekből [23]-ban az alábbi, az 1.2.8. és az 1.2.11. tételekhez hasonló, egyedi pontok törölhetőségére vonatkozó szimmetrikus és aszimmetrikus feltételeket vezettük be.

**3.2.1. tétel.** [23] *Az  $\mathcal{O}$  redukció topológia-megőrző a  $(\mathcal{H}, 1, 1, B)$  képre, ha az  $\mathcal{O}$  által törölt bármely  $p \in B$  pixelre az alábbiak teljesülnek:*

1.  *$p$  egyszerű pixel.*
2. *Bármely egyszerű  $q \in N_1^{*\mathcal{H}}(p)$  pixelre  $p$  egyszerű a  $(\mathcal{H}, 1, 1, B \setminus \{q\})$  képen vagy  $q$  egyszerű a  $(\mathcal{H}, 1, 1, B \setminus \{p\})$  képen (vagyis a  $\{p, q\}$  halmaz egyszerű).*
3.  *$p$  nem eleme kis objektumnak (lásd az 1.8. ábrát).*

**3.2.2. tétel.** [23] *Az  $\mathcal{O}$  redukció topológia-megőrző a  $(\mathcal{H}, 1, 1, B)$  képre, ha az  $\mathcal{O}$  által törölt bármely  $p \in B$  pixelre az alábbiak teljesülnek:*

1.  *$p$  egyszerű pixel.*
2. *Bármely olyan egyszerű  $q \in N_1^{*\mathcal{H}}(p)$  pixelre a  $\{p, q\}$  halmaz egyszerű vagy a halmaznak  $q$  a kitüntetett eleme (lásd az 1.4. ábrát).*
3.  *$p$  nem a kitüntetett eleme kis objektumnak (lásd az 1.8. ábrát).*

### 3.2.2. Feltételek $(\mathcal{T}, 2, 1)$ és $(\mathcal{T}, 1, 2)$ képekre

A háromszög-mozaikon mintavételezett képekre értelmezett redukciókra eddig csak az alábbi kritériumokat bizonyítottuk.

**3.2.3. tétel.** [28] *Az  $\mathcal{O}$  redukció topológia-megőrző, ha valamennyi  $(T, k, \bar{k}, B)$  képre  $((k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$  teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. *Valamennyi  $\mathcal{O}$  által törölt pixel egyszerű.*
2. *Valamennyi  $\mathcal{O}$  által törölt, egymással  $k$ -szomszédos pixelpár (lásd az 1.4-1.5. ábrákat) egyszerű halmazt alkot.*
3.  *$\mathcal{O}$  nem töröl teljesen egyetlen kis objektumot sem (lásd az 1.6. ábrát).*

### 3.2.3. A feltételek általánosítása 2D képekre

Az egyes szabályos 2D mozaikokra bemutatott kritériumok általánosítása előtt egy, a kételemű pixelhalmazokra vonatkozó kulcsfontosságú összefüggést ismeretetek, melyre hivatkozni fogok az általános feltételek bizonyításánál.

**3.2.1. lemma.** *Az egyszerű fekete pixelekből álló  $\{p, q\}$  halmaz akkor és csak akkor egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B)$  képen, ha  $p$  egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen.*

*Bizonyítás.* Indirekt módon tegyük fel, hogy a  $\{p, q\}$  halmazra teljesül a lemma feltétele, de  $p$  nem egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen, ami azt jelenti, hogy ha csak a  $p$  és a  $q$  pixeleket töröljük a kiindulási képen, akkor megváltozik a kép topológiája. Az egyszerű halmaz definíciója szerint viszont akkor  $q$  szükségszerűen egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{p\})$  képen. Ez viszont azt jelentené, hogy  $p$  és  $q$  pixelek törlése után sem változik a topológia, ami ellentmond az előző következménynek.

Most tegyük fel, hogy  $p$  egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen. Akkor a  $\{p, q\}$  halmaz pixeleit  $\langle q, p \rangle$  sorrendben törölve biztosan nem változik a topológia, így definíció szerint a  $\{p, q\}$  halmaz egyszerű.  $\square$

Ezenkívül az alábbi észrevételnek is szerepe lesz a későbbi bizonyításban.

**3.2.1. állítás.** *A  $(\mathcal{T}, 1, 2, B)$  és az  $(\mathcal{S}, 1, 2, B)$  képeken nem szerepel sem kis objektum, sem pedig kis üreg (lásd az 1.6. és az 1.7. ábrákat).*

Az általános feltételek közül először azokat tárgyalom, amelyek pixelkonfigurációkat vizsgálnak (lásd 3.2.4. tétel), majd ezekből levezetek olyan szimmetrikus és aszimmetrikus feltételeket is (lásd 3.2.5 és 3.2.6. tételek), amelyek egyedi pixelek törölhetőségét ellenőrzik.

**3.2.4. tétel.** *Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha valamennyi  $(V, k, \bar{k}, B)$  képre  $(V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}; (k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$ , teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. Valamennyi  $\mathcal{R}$  által törölt pixel egyszerű.
2. Valamennyi  $\mathcal{R}$  által törölt, egymással  $k$ -szomszédos  $p, q$  pixelpár (lásd az 1.4. és az 1.5. ábrákat) esetén  $p$  egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen.
3. Ha  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$ , akkor  $\mathcal{R}$  nem töröl teljesen egyetlen kis objektumot sem (lásd az 1.6.-1.8. ábrákat).

*Bizonyítás.* Vizsgáljuk az öt figyelembevett képtípust:

- $\mathcal{P} = (\mathcal{T}, 1, 2, B)$ :  
A 3.2.3. tétel a 3.2.1. lemma és a 3.2.1. állítás alapján egyszerűsíthető úgy, hogy a bizonyítandó tételt kapjuk.
- $\mathcal{P} = (\mathcal{T}, 2, 1, B)$ :  
Vegyük észre, hogy az egy és két pixelből álló objektumokat a 3.2.3. tétel feltételei kétszer ellenőrzik: egyszer az 1. ill. a 2. feltételben, egyszer pedig a 3. feltételben. Ezen észrevétel és a 3.2.1. lemma alapján a 3.2.3. tétel egyszerűsíthető úgy, hogy a bizonyítandó tételhez jussunk.
- $\mathcal{P} = (\mathcal{S}, 1, 2, B)$ :  
A bizonyítandó tétel az 1.2.5. tételnek a 3.2.1. lemma és a 3.2.1. állítás szerinti egyszerűsítésével adódik.
- $\mathcal{P} = (\mathcal{S}, 2, 1, B)$ :  
Az 1.2.5. tétel a 3.2.1. lemma segítségével egyszerűsíthető úgy, hogy a bizonyítandó tételhez jussunk.
- $\mathcal{P} = (\mathcal{H}, 1, 2, B) = (\mathcal{H}, 2, 1, B)$ :  
A bizonyítandó tételt a [23]-ben szereplő 4.4. tételnek a 3.2.1. lemma szerinti egyszerűsítésével kapjuk meg.

□

**3.2.5. tétel.** Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $(V, k, \bar{k}, B)$  képre ( $V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}; (k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2)$ ) és annak bármely  $\mathcal{R}$  által törölt  $p \in B$  pixelére teljesül az alábbi három feltétel:

1.  $p$  egyszerű pixel a  $(V, k, \bar{k}, B)$  képen.
2. Valamennyi  $q \in N_k^*(p) \cap B$  egyszerű pixelre  $p$  egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen.
3. Ha  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$ , akkor a  $p$  pixel nem eleme egyetlen kis objektumnak sem (lásd az 1.6.-1.8. ábrákat).

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy  $\mathcal{R}$  eleget tesz a 3.2.4. tétel feltételeinek.

- Az 1. feltétel szerint a  $\mathcal{R}$  által törölt bármely  $p$  pixel egyszerű, így a 3.2.4. tétel 1. feltétele teljesül.
- Mivel  $p$  az 1. feltétel miatt egyszerű, így a 2. feltételből következik a  $\{p, q\}$  halmaz egyszerűsége (a  $\langle q, p \rangle$  sorrend szerinti törléssel). Következésképpen  $\mathcal{R}$  teljesíti a 3.2.4. tétel 2. feltételét is.
- A 3. feltétel szerint  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$  vagy  $V = \mathcal{H}$  esetben  $\mathcal{R}$  nem törli kis objektumoknak egyetlen pixelét sem. Ez speciális esete a 3.2.4. tétel 3. feltételének.

□

**3.2.6. tétel.** *Az  $\mathcal{R}$  redukció topológia-megőrző, ha tetszőleges  $(V, k, \bar{k}, B)$  képre  $(V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}; (k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$ , és annak bármely  $\mathcal{R}$  által törölt  $p \in B$  pixelére teljesül az alábbi három feltétel:*

1.  *$p$  egyszerű pixel a  $(V, k, \bar{k}, B)$  képen.*
2. *Valamennyi  $q \in N_k^{*V}(p) \cap B$  egyszerű pixelre  $p$  egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen vagy a következő teljesül:*
  - *Ha  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$ , akkor  $q$  az 1.4. ábra valamely konfigurációjában a kitüntetett elem.*
  - *Ha  $(k, \bar{k}) = (1, 2)$ , akkor  $q$  az 1.5. ábra valamely konfigurációjában a kitüntetett elem.*
3. *Ha  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$ , akkor a  $p$  pixel nem kitüntetett eleme egyetlen kis objektumnak sem (lásd az 1.6-1.8. ábrákat).*

*Bizonyítás.* Ismét azt igazoljuk, hogy  $\mathcal{R}$  eleget tesz a 3.2.4. tétel feltételeinek.

- Az 1. feltétel szerint a  $\mathcal{R}$  által törölt bármely  $p$  pixel egyszerű, így a 3.2.4. tétel 1. feltétele teljesül.
- Ha valamely  $p$  és  $q \in N_k^{*V}(p) \cap B$  egyszerű pixelekre  $p$  egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen, akkor az előző tétel bizonyításában tárgyaltak szerint teljesül a 3.2.4. tétel 2. feltétele. Tegyük fel, hogy valamely  $p$  és  $q \in N_k^{*V}(p) \cap B$  egyszerű pixelekre teljesül a 2. feltétel, de  $p$  nem egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{q\})$  képen. Akkor a 3.2.1. lemma szerint  $\{p, q\}$  halmaz nem egyszerű, azaz  $q$  nem egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \setminus \{p\})$  képen, továbbá ha  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$ , akkor  $p$  nem kitüntetett elem az 1.4. ábra konfigurációiban. A  $(k, \bar{k}) = (1, 2)$  esetben pedig  $p$  nem kitüntetett elem az 1.5. ábra konfigurációiban, azaz  $\mathcal{R}$  nem törli  $q$ -t. Tehát  $\mathcal{R}$  ekkor sem sérti a 2. feltételt.
- Bármely kis objektumnak (lásd az 1.6-1.8. ábrákat) egyetlen kitüntetett eleme van, de azt a  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$  esetben biztosan nem törli  $\mathcal{R}$  a 3. feltétel miatt, így teljesül a 3.2.4. tétel 3. feltétele.

□

### 3.3. Elegendő feltételek topológia-megőrző addíciókra

Addíciók topológia-megőrzésére az  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  és a  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képekre [30]-ban javasoltunk elegendő feltételeket. Ezen kritériumokat egy, az addíciók és redukciók között fennálló dualitási szabály alapján származtattunk az 1.2.5. és az 1.2.6. tételek feltételeiből.

Az alábbiakban az említett dualitási szabályt olyan általános formában adom meg, amely a dolgozatban vizsgált valamennyi mozaikra érvényes, majd ennek felhasználásával általánosítom a [30]-ban levezetett feltételeket is.

**3.3.1. tétel.** [30] *Legyen  $\mathcal{A}$  egy addíció és  $\mathcal{R}$  a vele duális redukció, és legyen  $\mathcal{P} = (V, k, \bar{k}, B)$  egy tetszőleges kép.  $\mathcal{A}$  topológia-megőrző a  $\mathcal{P}$  képre akkor és csak akkor, ha  $\mathcal{R}$  topológia-megőrző a  $\mathcal{P}^{-1} = (V, \bar{k}, k, V \setminus B)$  képre.*

**3.3.2. tétel.** *Az  $\mathcal{A}$  addíció topológia-megőrző, ha valamennyi  $(V, k, \bar{k}, B)$  képre  $(V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}; (k, \bar{k}) = (2, 1), (1, 2))$  teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. *Valamennyi  $\mathcal{A}$  által módosított fehér pixel egyszerű.*
2. *Valamennyi  $\mathcal{A}$  által módosított, egymással  $k$ -szomszédos fehér  $p$  és  $q$  pixelre  $p$  egyszerű a  $(V, k, \bar{k}, B \cup \{q\})$  képen.*
3. *Ha  $(k, \bar{k}) = (2, 1)$ , akkor  $\mathcal{A}$  nem tölt fel egyetlen kis üreget sem (lásd az 1.6-1.8. ábrákat).*

*Bizonyítás.* Legyen az  $\mathcal{R}$  redukció az  $\mathcal{A}$  duálisa. Összehasonlítva a tételünk 1-3. feltételeit a 3.2.4. tétel feltételeivel könnyen ellenőrizhető az, hogy  $\mathcal{R}$  teljesíti az utóbbi feltételeket, így topológia-megőrző. Tehát a 3.3.1. tétel szerint  $\mathcal{A}$  is topológia-megőrző.  $\square$

Fontos hangsúlyozni, hogy a 3.3.1. tétel nem szorítkozik 2D képekre, így a 3D addíciókra is levezethetők elegendő feltételek redukciókra vonatkozó kritériumokból. Például  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képekre a dualitási szabály segítségével az 1.2.7. tétel egyszerűsített változatából az alábbi elegendő feltételeket kaptuk:

**3.3.3. tétel.** [30] *Az  $\mathcal{A}$  addíció topológia-megőrző ha tetszőleges  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képre teljesülnek az alábbi feltételek.*

1. *Bármely, az  $\mathcal{A}$  által a képhez hozzáadott voxel egyszerű.*
2. *Bármely, az  $\mathcal{A}$  által a képhez hozzáadott egymással 3-szomszédos voxelpár egyszerű halmazt képez.*
3. *Bármely, az  $\mathcal{A}$  által a képhez hozzáadott, átlós háromszöget alkotó fehér vöxelek halmaza egyszerű.*

### 3.4. Összefoglalás és távlati célok

Ebben a fejezetben az első tézisponthoz tartozó legfontosabb eredményeket ismertetem.

A háromszög-, a négyszög-, és a hatszög-mozaikon a topológia-megőrzés szempontjából kulcsfontosságú egyszerű pixeleket kétféleképpen jellemeztem. Valamennyi tárgyalt 2D mozaiktípus esetén megállapítható, hogy egy  $p$  pixel egyszerűsége lokálisan ellenőrizhető: ez a tulajdonság csupán az  $N_2^V(p)$  ( $V \in \{\mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{T}\}$  halmaz elemeitől függ.

Bemutattam továbbá a három- és a hatszög-mozaikokon értelmezett redukciók topológia-megőrzésének néhány elegendő feltételét is. Ezen és a korábbi, négyzet-mozaikos esetre javasolt kritériumok között jól megfigyelhetők bizonyos analógiák. Ezekre alapozva olyan általános alakban is megadtam a tárgyalt elegendő feltételeket, amelyek mindhárom szabályos mozaikra érvényesek.

Ezenkívül beláttam egy, az addíciók és a redukciók között fennálló dualitási tételt. Ennek segítségével könnyen megkonstruálhatók valamennyi 2D és 3D szabályos mozaikon értelmezett addíciók topológiai korrektségének elegendő feltételei. Így e tétel alapján általános elegendő feltételeket adtam a topológia-megőrző addíciókra is.

A fenti eredményeket egy hatástényezős folyóiratcikkben [23] és három konferencia-kiadványban [24, 28, 30] közzétettük. Ezenkívül a 3.1.3. és a 3.2.3. pontokban ismertetett általános feltételeinket az 8th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2013) konferenciára benyújtott cikkünk tartalmazza.

A képműveletek topológiai jellemzése témakörben további kutatásokat is tervezünk, mivel 3D-ben eddig csak a kocka-mozaikra születtek a tárgyalt problémákra eredmények. Például a 3D tér csonkolt oktaéderekkel ill. rombikus dodekaéderekkel is kitölthető hézagmentesen, és ezeknek a nem-konvencionális mozaikoknak a topológiai jellemzése még megoldatlan. Szeretnénk továbbá feltárni a 2D és a 3D Voronoi diagramok topológiáját is.





## 4. fejezet

# Topológia-megőrző hexagonális és trianguláris vékonyító algoritmusok

A  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  és a  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képek vékonyítását rövidebben *hexagonális* ill. *trianguláris* vékonyításnak is nevezzük, melyeknek irodalma az  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  és a  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képekre javasolt számos módszerhez képest igencsak szegényes. Tudomásunk szerint  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  képekre korábban csak Deutsch és Staunton, míg  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képekre egyedül Deutsch javasolt vékonyító eljárásokat [10, 78]. Közülük Deutsch algoritmusai [10] nem őrzik meg a topológiát, mivel törlik az izolált pixeleket is, míg a [78]-ban javasolt hexagonális algoritmus topológiai korrektsége nem bizonyított.

Ezzel szemben az előző fejezetben ismertetett elegendő feltételeket a 2. fejezetben bemutatott párhuzamos vékonyító stratégiákkal és változatos geometriai kényszerfeltételekkel kombinálva olyan új hexagonális és trianguláris eljárásokat konstruáltunk, amelyek topológia-megőrző volta bonyolult és terjedős bizonyítások nélkül is garantált. A következőkben ezen új algoritmusokat mutatom be.

A javasolt algoritmusok elnevezésekor a következőképpen jártam el: az  $\alpha$ -FP- $\beta$ - $\varepsilon$  algoritmusok a teljesen párhuzamos stratégiát követik, az  $\alpha$ -SI- $\beta$ - $\varepsilon$  eljárások irány-alapúak (egységesen 6 aliterációval) és az  $\alpha$ -SF $_l$ - $\beta$ - $\varepsilon$  algoritmusok pedig  $l$  almezővel dolgozó almező-alapúak, ahol:

- $\alpha$ : a bemeneti képek mozaiktípusára utal, lehetséges értékei  $\mathcal{H}$  és  $\mathcal{T}$ .
- $\beta$ : arra utal, hogy az adott algoritmus a 3.2.5. és a 3.2.6. tételek szerinti szimmetrikus vagy aszimmetrikus elegendő feltételeken alapul-e. Lehetséges értékei: SYM (szimmetrikus), ASYM (aszimmetrikus).
- $\varepsilon$ : a figyelembevett végpixelek (mint geometriai kényszerfeltételek) lehetséges típusai,  $E_0$  ill.  $E_1^\alpha$ , amelyek meghatározása a következő:

**4.0.1. definíció.** Nem létezik olyan  $p$  fekete pixel  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  és  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képeken, amely  $E_0$ -végpixel lenne. (Az  $E_0$ -végpixelfeltétel tehát a fekete pixelek üres halmazát jelöli.)

**4.0.2. definíció.** A  $p \in B$  pixel  $E_1^H$ -végpixel a  $(\mathcal{H}, 1, 1, B)$  képen, ha  $p$ -nek pontosan egy fekete valódi 1-szomszédja van.

**4.0.3. definíció.** A  $p \in B$  pixel  $E_1^T$ -végpixel a  $(\mathcal{T}, 2, 1, B)$  képen, ha  $p$  egyszerű, és legfeljebb kettő valódi fekete 2-szomszédja és legfeljebb egy valódi 1-szomszédja van.

A nem létező  $\varepsilon = E_0$  végpixelek megőrzése nem jelent korlátozást, geometriai kényszerfeltételt. Bevezetését az indokolja, hogy a zsugorító és a további típusú végpontpixeleket megőrző, középvonalra vékonyító algoritmusokat egy-egyesen kezelhessem.

## 4.1. Teljesen párhuzamos algoritmusok

A teljesen párhuzamos vékonyító algoritmusaink sémáját a 4.1. algoritmus mutatja be.

---

### 4.1. algoritmus. $\alpha$ -FP- $\beta$ - $\varepsilon$

---

- 1: *Input:* az  $(\alpha, 2, 1, X)$  kép
  - 2: *Output:* az  $(\alpha, 2, 1, Y)$  kép
  - 3:  $Y = X$
  - 4: **repeat**
  - 5:    $D = \{p \mid p \text{ } \alpha\text{-FP-}\beta\text{-}\varepsilon\text{-törölhető az } Y \text{ képen}\}$
  - 6:    $Y = Y \setminus D$
  - 7: **until**  $D = \emptyset$
- 

Az  $\alpha$ -FP- $\beta$ - $\varepsilon$ -törölhető pixeleket a következőképpen definiáljuk:

**4.1.1. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\alpha$ -FP-SYM- $\varepsilon$ -törölhető, ha nem  $\varepsilon$ -végpixel és kielégíti a 3.2.5. tétel feltételeit.

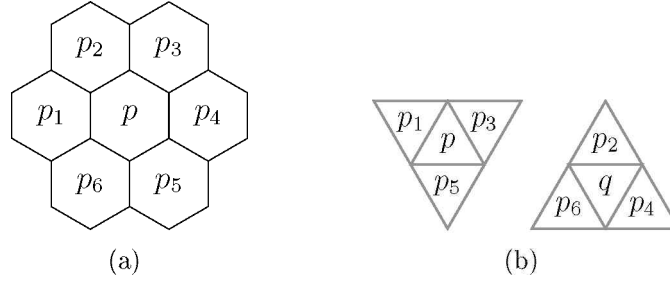
**4.1.2. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\alpha$ -FP-ASYM- $\varepsilon$ -törölhető, ha nem  $\varepsilon$ -végpixel és kielégíti a 3.2.6. tétel feltételeit.

**4.1.1. tétel.** Az  $\alpha$ -FP- $\beta$ - $\varepsilon$  algoritmus topológia-megőrző.

*Bizonyítás.*  $\varepsilon = E_0$  esetben nyilvánvaló, hogy  $\beta = \text{SYM}$  választásakor közvetlenül a 3.2.5. tétel feltételeiből,  $\beta = \text{ASYM}$  esetén pedig közvetlenül a 3.2.6. tétel feltételeiből származik az  $\alpha$ -FP- $\beta$ - $\varepsilon$  algoritmus. Az  $\varepsilon = E_0$  esetben további megszorítást is teszünk a vizsgált pixel törölhetőségére, amivel nem befolyásoljuk a redukció topológiai korrektségét.  $\square$

## 4.2. Irány-alapú párhuzamos algoritmusok

Mind a  $\mathcal{H}$ , mind pedig a  $\mathcal{T}$  mozaikon mintavételezett képekre olyan irány-alapú algoritmusokat konstruáltunk, amelyeknél egy iterációs lépés 6 al-iterációból áll. Az egyes al-iterációk redukcióiban csak az adott típusú határpixelet törölhetjük. A törölhető pixelek meghatározásához bevezetünk egy további fogalmat:  $(\mathcal{H}, 1, 1)$  és  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képeken  $d$ -határpixelnek nevezzük azon határpixelet, amelyeknek a 4.1. ábra jelölése szerinti  $p_d$  1-szomszédjuk fehér ( $d = 1, \dots, 6$ ). Az irány-alapú algoritmusaink sémáját a 4.2. algoritmus vázolja fel.



4.1. ábra. A  $p$  pixel 1-szomszédainak indexelése a hatszög-mozaikon (a) és a háromszög-mozaikon, ahol a pixelek kétféle irányú háromszögek lehetnek (b).

---

### 4.2. algoritmus. $\alpha$ -SI- $\beta$ - $\varepsilon$

---

- 1: *Input:* az  $(\alpha, 2, 1, X)$  kép
  - 2: *Output:* az  $(\alpha, 2, 1, Y)$  kép
  - 3:  $Y = X$
  - 4:  $I = \emptyset$
  - 5: **repeat**
  - 6:    $D = \emptyset$
  - 7:   **for**  $d = 1$  **to** 6 **do**
  - 8:      $D_d = \{p \mid p \text{ } \alpha\text{-SI-}d\text{-}\beta\text{-}\varepsilon\text{-törölhető az } Y \text{ képen} \}$
  - 9:      $Y = Y \setminus D_d$
  - 10:     $D = D \cup D_d$
  - 11: **until**  $D = \emptyset$
- 

Az  $\alpha$ -SI- $\beta$ - $\varepsilon$  algoritmusok egyes aliterációiban a törölhető pixeleket az alábbi négy definícióval adjuk meg:

**4.2.1. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\mathcal{H}$ -SI- $d$ -SYM- $\varepsilon$ -törölhető ( $\varepsilon \in \{E_0, E_1^{\mathcal{H}}\}$ ,  $d = 1, \dots, 6$ ), ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1.  $p$  egyszerű, de nem  $\varepsilon$ -végpixel és  $d$ -határpixel.
2. Ha  $\varepsilon = E_0$ , akkor  $p$  nem eleme olyan objektumnak, amely két 1-szomszédos  $d$ -határpixelből áll.

**4.2.2. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\mathcal{T}$ -SI- $d$ -SYM- $\varepsilon$ -törölhető ( $\varepsilon \in \{E_0, E_1^T\}$ ,  $d = 1, \dots, 6$ ), ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1.  $p$  egyszerű, de nem  $\varepsilon$ -végpixel és  $d$ -határpixel.
2. Ha  $\varepsilon = E_0$ , akkor  $p$  nem eleme kettő vagy három  $d$ -határpixelből álló kis objektumnak.

**4.2.3. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\mathcal{H}$ -SI- $d$ -ASYM- $\varepsilon$ -törölhető ( $\varepsilon \in \{E_0, E_1^H\}$ ,  $d = 1, \dots, 6$ ), ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1.  $p$  egyszerű, de nem  $\varepsilon$ -végpixel és  $d$ -határpixel.
2. Ha  $\varepsilon = E_0$ , akkor  $p$  nem kitüntetett eleme olyan kis objektumnak, amely két 1-szomszédos  $d$ -határpixelből áll (lásd 1.4. ábra).

**4.2.4. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\mathcal{T}$ -SI- $d$ -ASYM- $\varepsilon$ -törölhető ( $\varepsilon \in \{E_0, E_1^T\}$ ,  $d = 1, \dots, 6$ ), ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1.  $p$  egyszerű, de nem  $\varepsilon$ -végpixel és  $d$ -határpixel.
2. Ha  $\varepsilon = E_0$ , akkor  $p$  nem kitüntetett eleme kettő vagy három  $d$ -határpixelből álló kis objektumnak.

A bemutatott algoritmusok topológiai korrektségének bizonyításakor felhasználjuk az alábbi észrevételt.

**4.2.1. észrevétel.** Ha egy  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képen a  $p$  pixel  $d$ -határpixel, akkor egyetlen  $q \in N_1^{*T}(p)$  pixel sem lehet  $d$ -határpixel.

**4.2.1. tétel.** Az  $\alpha$ -SI- $\beta$ - $\varepsilon$  algoritmus topológia-megőrző.

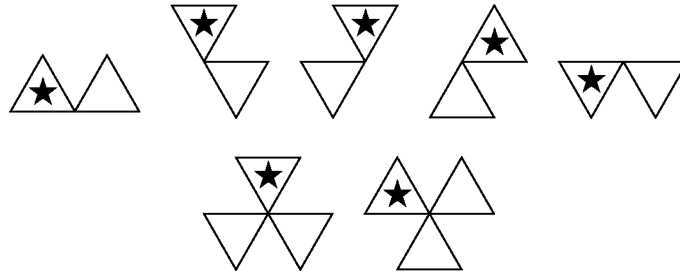
*Bizonyítás.* Jelöljük  $\mathcal{R}$ -rel azt a redukciót, amely az  $\alpha$ -SI- $d$ - $\beta$ - $\varepsilon$ -törölhető pixeleket törli a képről. Elegendő annak megmutatása, hogy  $\mathcal{R}$  teljesíti a 3.2.4. tétel feltételeit.

A 4.2.1-4.2.2. definíció ill. 4.2.3-4.2.4. definíció 1. feltételéből következik a 3.2.5. tétel ill. a 3.2.6. tétel 1. feltétele.

Ezenkívül  $\alpha = \mathcal{H}$  esetben könnyen belátható, hogy ha két egyszerű, 1-szomszédos  $p, q$   $d$ -határpixel nem alkot objektumot, akkor a  $\{p, q\}$  halmaz egyszerű. Ha a  $\{p, q\}$  halmaz egy kételemű objektum és  $\varepsilon = E_1^H$ , úgy  $p$  és  $q$  végpixelek, azaz nem törölhetők, ha viszont  $\varepsilon = E_0$ , akkor  $\mathcal{R}$  a 4.2.1. ill. a 4.2.3. definíció 2. feltétele miatt hagyja meg őket. Az  $\alpha = \mathcal{T}$  esetben pedig nyilvánvaló, hogy két 3-szomszédos pixel közül az egyik biztosan nem  $d$ -határpixel, azaz egyikük biztosan nem T-SI-SYM- $\varepsilon$ -törölhető. Tehát mindkét esetben teljesül a 3.2.4. tétel 2. feltétele.

Most vizsgáljuk azt, hogy  $\mathcal{R}$  törölhet-e teljesen egy kis objektumot. Vegyük észre, hogy az 1.8. ábrán látható kis objektumoknak biztosan van olyan

pixele, amely nem  $d$ -határpixel, ezért az  $\alpha = \mathcal{H}$  esetben teljesül a 3.2.4. tétel 3. feltétele is. Ha  $\alpha = \mathcal{T}$ , akkor 4.2.1. észrevételből adódóan az 1.6. ábra kis objektumai közül csak a 4.2. ábrán feltüntetettek valamennyi pixele  $d$ -határpixel. Ugyanakkor ezen objektumok csak  $E_1^{\mathcal{T}}$ -végpixelekkel állnak, így  $\varepsilon = E_1^{\mathcal{T}}$  esetben  $\mathcal{R}$  egyik objektumból sem töröl pixel. Ha pedig  $\varepsilon = E_0$ , akkor mivel mindegyik 4.2. ábrán levő kis objektum kettő vagy három pixelből áll, ezért a 4.2.2. definíció ill. a 4.2.4. definíció 2. feltétele miatt azok nem törölhetők. Következésképpen az  $\alpha = \mathcal{T}$  esetben is teljesül a 3.2.4. tétel 3. feltétele.  $\square$



4.2. ábra. A  $(\mathcal{T}, 2, 1)$  képek mindazon lehetséges kis objektumai, amelyekben valamennyi pixel  $d$ -határpont ( $d = 1, \dots, 6$ ) ill. mindegyik pixel ugyanabba az  $SF_2^{\mathcal{T}}(i)$  almezőbe esik ( $i = 0, 1$ ).

### 4.3. Almező-alapú párhuzamos algoritmusok

A  $\mathcal{H}$  és a  $\mathcal{T}$  mozaikokat 2-2 mintázat szerint osztjuk fel almezőkre a 4.3. ábrán látható módon.  $l$  darab almező esetén az  $i$ -edik almezőhöz tartozó pixelhalmazokat  $SF_l^{\alpha}(i)$ -vel jelöljük ( $0 \leq i < l$ ). Az  $\alpha = \mathcal{H}$  esetben három ill. négy, míg  $\alpha = \mathcal{T}$ -re kettő ill. négy almezős felbontásokkal dolgozunk (vagyis ha  $\alpha = \mathcal{H}$ , akkor  $l = 3, 4$ , ha pedig  $\alpha = \mathcal{T}$ , akkor  $l = 2, 4$ ). Ezen felbontások az alábbi fontos tulajdonsággal rendelkeznek.

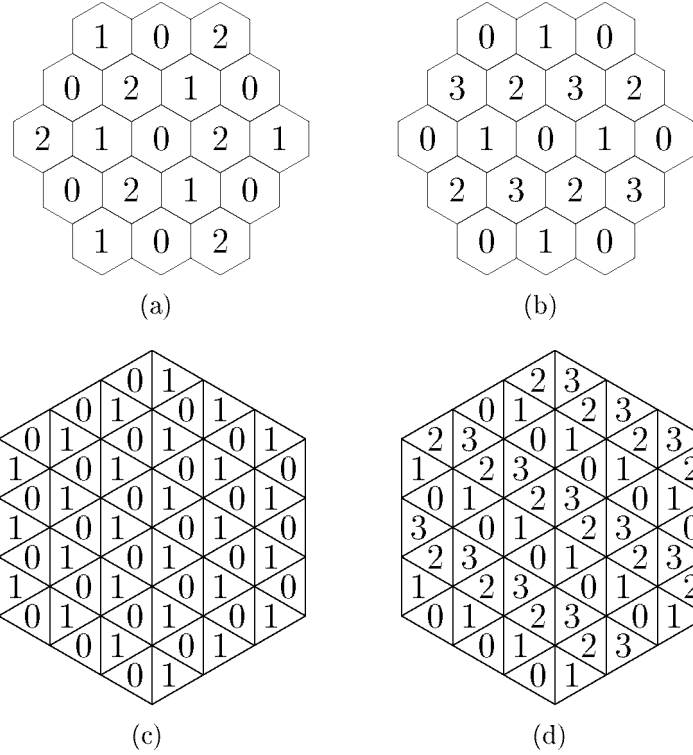
**4.3.1. észrevétel.** Ha  $p \in SF_l^{\alpha}(i)$ , akkor  $N_1^{*\alpha}(p) \cap SF_k(i) = \emptyset$ , vagyis  $p$  nem kerülhet ugyanabba az almezőbe, mint amibe az 1-szomszédai.

Almező-alapú eljárásaink pseudo-kódját a 4.3. algoritmus adja meg. Az algoritmus által vizsgált  $\alpha$ -SF- $l$ - $i$ - $\beta$ - $\varepsilon$ -törölhető pixeleket az alábbi módon értelmezzük.

**4.3.1. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\mathcal{H}$ -SF- $l$ - $i$ - $\beta$ - $\varepsilon$ -törölhető, ha  $p \in SF_l^{\mathcal{H}}(i)$  ( $l = 3, 4; i = 0, \dots, l-1$ ) és  $p$  egyszerű pixel.

**4.3.2. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\mathcal{T}$ -SF- $l$ - $i$ -SYM- $\varepsilon$ -törölhető, ha az alábbiak teljesülnek:

1.  $p \in SF_l^{\mathcal{T}}(i)$  ( $l = 2, 4; i = 0, \dots, l-1$ ) és  $p$  egyszerű pixel.



4.3. ábra.  $\mathcal{H}$  partícionálása három (a) ill. négy (b) almezőre, valamint  $\mathcal{T}$  partícionálása kettő (c) ill. négy (d) almezőre. Az  $i$ -vel jelölt képelemek az  $SF_l^\alpha(i)$  halmazba tartoznak (ha  $\alpha = H$ , akkor  $l = 3, 4$ , ha pedig  $\alpha = T$ , akkor  $l = 2, 4$ ;  $0 \leq i < l$ ).

2. Ha  $\varepsilon = E_0$ , akkor  $p$  nem eleme egyetlen olyan  $\{p, q\}$  vagy  $\{p, q, r\}$  kis objektumnak sem, amelyekre  $q, r \in SF_l^T(i)$ .

**4.3.3. definíció.** A  $p$  fekete pixel  $\mathcal{T}$ -SF- $l$ - $i$ -ASYM- $\varepsilon$ -törölhető, ha az alábbiak teljesülnek:

1.  $p \in SF_l^T(i)$  ( $l = 2, 4; i = 0, \dots, l - 1$ ) és  $p$  egyszerű pixel.
2. Ha  $\varepsilon = E_0$ , akkor  $p$  nem kitüntetett eleme egyetlen olyan  $\{p, q\}$  vagy  $\{p, q, r\}$  kis objektumnak sem, amelyekre  $q, r \in SF_l^T(i)$ .

Fontos megjegyezni, hogy a 4.3. algoritmus az ún. iteráció-szintű határpixel-ellenőrzés módszerét követi, amelyet először [58]-ben javasoltunk. Ennek bevezetését az a megfigyelés indokolta, hogy ha (a hagyományos almező-alapú sémának megfelelően) minden egyes iterációs lépésben az aktuális kép aktív határpixeljaira vizsgáljuk a törölhetőség feltételét, akkor számos nemkívánatos végpixelt állítunk elő, amelyekből szükségképpen fölösleges ágak nőnek. Az iteráció-szintű határpixel-ellenőrzés esetén egy iterációs lépésben csak azok a pixelek törölhetők, amelyek már az iteráció elején is határpixelek voltak, ezáltal a fenti nemkívánatos jelenség kiküszöbölhető.

**4.3. algoritmus.**  $\alpha$ -SF $_l$ - $\beta$ - $\varepsilon$ 


---

```

1: Input: az (  $\alpha$ , 2, 1, X ) kép
2: Output: az (  $\alpha$ , 2, 1, Y ) kép
3:  $Y = X$ 
4: repeat
5:    $D = \emptyset$ 
6:    $E = \{p \mid p \text{ határpixel de nem } \varepsilon\text{-végpixel az } Y \text{ képen}\}$ 
7:   for  $i = 0$  to  $l - 1$  do
8:      $D_i = \{p \mid p \in E \text{ és } p \text{ } \alpha\text{-SF-}l\text{-}i\text{-}\beta\text{-törölhető az } Y \text{ képen}\}$ 
9:      $Y = Y \setminus D_i$ 
10:     $D = D \cup D_i$ 
11: until  $D = \emptyset$ 

```

---

**4.3.1. tétel.** Az  $\alpha$ -SF- $l$ - $\beta$ - $\varepsilon$  algoritmus topológia-megőrző.

*Bizonyítás.* Jelöljük  $\mathcal{R}$ -rel azt a redukciót, amely pontosan az  $\alpha$ -SF- $l$ - $i$ - $\beta$ - $\varepsilon$ -törölhető pixeleket törli. Ismét csak annyit kell bizonyítunk, hogy  $\mathcal{R}$  teljesíti a 3.2.4. tétel feltételeit.

A 4.3.1-4.3.3. definíciók szerint egy  $\alpha$ -SF- $l$ - $i$ - $\beta$ - $\varepsilon$ -törölhető pixel teljesíti a 3.2.4. tétel 1. feltételét. A 4.3.1. észrevétel értelmében a lehetséges  $l$  és  $i$  értékek mindegyikére elmondható, hogy ha  $p \in D_i$ , akkor  $N_1^*(p) \cap D_i = \emptyset$ . Így mivel a 3.2.4. tétel 2. feltétele csak olyan pixelpárosokra vonatkozik, amelyek mindkét tagja törlésre kerül, ezért a kérdéses feltétel vizsgálata ekkor fölösleges.

Végül vizsgáljuk azt, hogy  $\mathcal{R}$  miként módosíthatja a kis objektumokat. Ha  $\alpha = \mathcal{H}$  és  $l = 3, 4$ , akkor a 3.2.4. tétel 3. feltétele biztosan teljesül, mivel  $p$  egyetlen 2-szomszédja sem esik egy almezőbe  $p$ -vel, azaz  $p$  egyik 2-szomszédja sem törölődhet egyszerre  $p$ -vel. Nézzük az  $\alpha = \mathcal{T}$  esetet; ekkor  $l = 2, 4$ . A 4.3.1. észrevételből következik, hogy az 1.6. ábra kis objektumai közül csak a 4.2. ábrán levők pixelei esnek egy almezőbe. Innen a 4.2.1. tétel bizonyításának a kis objektumok törölhetőségére vonatkozó gondolatmenetét követve hasonlóan belátható, hogy a 3.2.4. tétel 3. feltétele teljesül.  $\square$

## 4.4. Az új algoritmusokkal generált vázszerű jellemzők

A 4.4. és a 4.5. ábrákon rendre a bemutatott hexagonális és trianguláris algoritmusaink által generált topológiai magok ill. középvonalak láthatóak egy olyan tesztképre, amelyen három karakter látható. Mivel az irány- és almező-alapú aszimmetrikus és szimmetrikus algoritmusok nagyon hasonló eredményeket adnak, ezért a szimmetrikus eljárások közül csak a teljesen párhuzamosak eredményét mutatjuk be.

## 4.5. Összefoglalás és távlati célok

A 3.2.4.-3.2.6. tételekben kimondott elegendő feltételek segítségével könnyen ellenőrizhető a négyszög-, hatszög- és háromszögmozaikon mintavételezett vékonyító algoritmusok topológiai korrektsége. E fejezetben olyan hexagonális és trianguláris algoritmusokat mutattam be, amelyek törlési feltételei az egyedi pixelek törölhetőségére vonatkozó feltételekből származtatottak, így a topológia-megőrzésük garantált. Az irány- és almező-alapú algoritmusok szimmetrikus és aszimmetrikus változatai – a törlési feltételek hasonlósága miatt – csak a zsugorító eljárásokra mutatnak eltérést. Ekkor azonban csak az aszimmetrikus változatok garantálják azt, hogy az objektumokat egy-egy izolált pixellé zsugorítsák, vagyis valóban a topológiai magot kapjuk.

Hexagonális algoritmusainkat egy konferencia-kiadványban [26] közzétettük, trianguláris eljárásinkat pedig egy, az *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* (Springer) folyóirathoz benyújtott cikkünkben ismertettük.

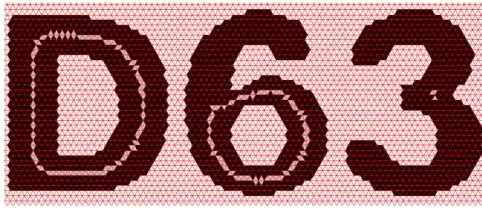
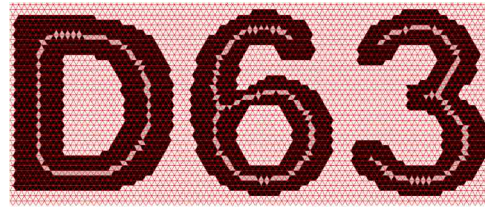
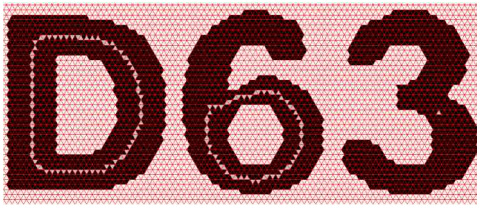
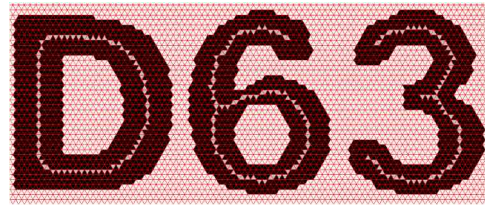
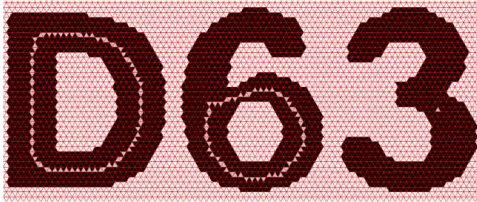
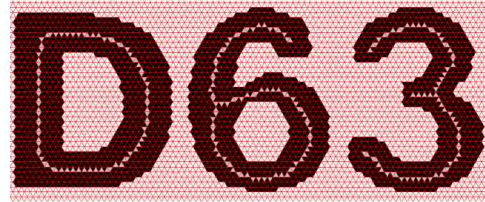
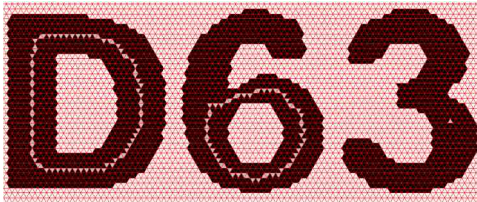
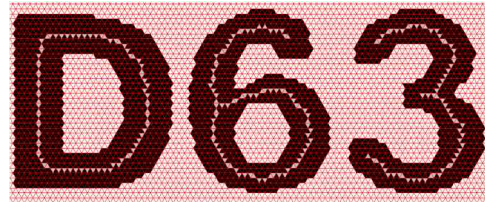
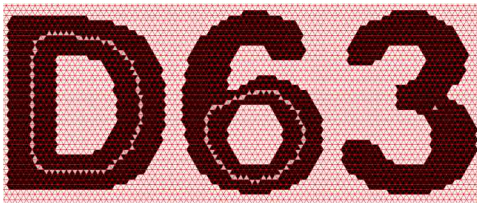
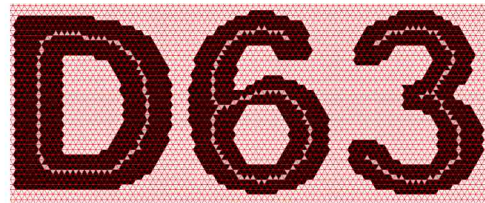
A kutatás következő lépése olyan további hexagonális és trianguláris vékonyító algoritmusok konstruálása, amelyek másfajta geometriai kényszerfeltételeket alkalmaznak. Így például szeretnénk kidolgozni a szűkületi pontok megőrzésén alapuló algoritmus-variánsokat is (lásd 2.3. fejezet).





4.4. ábra. A javasolt hexagonális algoritmusok közül a zsugorítók eredményei az első, míg a középvonalra vékonyítók a második oszlopban láthatók ugyanarra a tesztképre.



(a) T-FP-SYM- $E_0$ (b) T-FP-SYM- $E_1^T$ (c) T-FP-ASYM- $E_0$ (d) T-FP-ASYM- $E_1^T$ (e) T-SI-ASYM- $E_0$ (f) T-SI-ASYM- $E_1^T$ (g) T-SF<sub>2</sub>-ASYM- $E_0$ (h) T-SF<sub>2</sub>-ASYM- $E_1^T$ (i) T-SF<sub>4</sub>-ASYM- $E_0$ (j) T-SF<sub>4</sub>-ASYM- $E_1^T$ 

4.5. ábra. A javasolt trianguláris algoritmusok közül a zsugorítók eredményei az első, míg a középvonalra vékonyítók a második oszlopban láthatók ugyanarra a tesztképre.

## 5. fejezet

# Iterációnkénti simítással kombinált vékonyítás 3D képeken

A vázkijelölő módszerek egyik alapvető problémája az, hogy az általuk meghatározott vázközelítések számos hamis ágat vagy felszínszegmenst tartalmaznak. Ez korrigálható egy utófeldolgozó lépésben, az ún. *váz tisztítással* [76]. A váztisztító eljárások bizonyos fontossági mértékek alapján határozzák meg a nemkívánatos és eltávolításra ítélt vázszegmenseket. Ezen módszerek fő hátránya az, hogy az iteratív objektum-redukción alapuló vázkijelölés során a kiindulási objektum határán meglévő vagy a menetközben keletkező „egyenetlenségekből” kiinduló nemkívánatos vázszegmensek torzítják a váz „értékes” részeit is, mely deformációkat megőrzi a tisztító utófeldolgozás.

A „tisztább” megközelítés az objektum kontúrjának simításán alapszik. Görbék ill. felszínek simítására számos stratégia létezik [9, 18, 80, 84]. Sajnos közülük csak Couprie és Bertrand módszere alkalmas 3D bináris képek simítására, viszont az eljárás összetettsége miatt az nem kombinálható 3D vékonyító algoritmusokkal.

Jelen fejezetben tárgyalt kutatásunk eredménye az iteratív kontúrsimítással kombinált vékonyító stratégia megalkotása és a 3D algoritmusokba könnyen beépíthető (azok hatékony implementációjához illeszkedő) párhuzamos 3D kontúrsimító eljárás kidolgozása.

Első eredményként [54]-ben javasoltunk egy olyan kontúrsimító algoritmust, amely eltávolít bizonyos extremitásnak tekintett határpontokat. Mivel az algoritmus két topológia-megőrző párhuzamos redukciós operátorból áll, így maga az eljárás is topológia-megőrző. [56]-ben közzétettük ezen kontúrsimító algoritmus olyan továbbfejlesztett változatát, amely bizonyos 1-pontos kiugrások mellett számos 2 pontból álló kontúrzajt is képes eltávolítani ( $\mathcal{C}, 3, 1$ ) képekről. A törölhető pontokat  $3 \times 3 \times 3$ -as illesztőmintákkal adtuk meg.

A továbbiakban bemutatom a fejlettebb simító algoritmusunkat, ezt követően iterációnkénti simításon alapuló vékonyító sémánkat tárgyalom, amellyel csökkenthető a 3D vékonyító algoritmusok eredményein a nemkívánatos szegmensek száma. Ezután algoritmusunknak egy hatékony implementációját is

ismertetem, majd módszerünk alkalmazhatóságának alátámasztására néhány teszteredményt is közlök.

## 5.1. Kontúrsimító algoritmus

A javasolt algoritmus két párhuzamos, egymást követő redukcióból áll, melyeket  $R_1$ -gyel és  $R_2$ -vel jelölünk. Az általuk törölhető pontokat  $3 \times 3 \times 3$ -as illesztőmintákkal, más szóhasználatnál törlőmaszkokkal adjuk meg. Egy voxel törölhető  $R_1$  által, ha az a 5.1-5.5. ábrákon szereplő 37 maszkot tartalmazó

$$\mathcal{M}_{R_1} = \{U_0, \dots, U_8, N_0, \dots, N_8, W_0, \dots, W_8, UN, \dots, NE, UNW, \dots, USW\}$$

halmaznak legalább az egyik elemére illeszkedik. (A maszkokat a  $\mathcal{C}$  kockamozaikkal duális  $\mathbb{Z}^3$  rácson adtuk meg.) Az említett ábrákon a következő jelöléseket alkalmazzuk: minden „ $p$ ”, „ $\bullet$ ” egy-egy fekete pontot jelöl; minden „ $\circ$ ” egy-egy fehér pontot jelöl; a „ $\cdot$ ” jelölésű, ún. „don’t care” pontok színe fekete ill. fehér is lehet.

Az  $R_2$  redukció 5.1-5.5. ábrákon szereplő maszkok a  $p$  középpontra való tükrözöttjeit veszi figyelembe egy pont törölhetőségének megállapításakor.

Az egyes fázisok illesztőmintáinak tanulmányozásakor könnyen megérthető az eljárás lényege: az első fázisban a 3D hat főiránya közül az  $U$ , az  $N$  és a  $W$  irányokból, míg a másodikban a fennmaradó három irányban lévő „extremítások” eltávolítása történik. Egy álló kocka lapközéppontjait a kocka középpontjával összekötő vektorok (mint főirányok) mellett a simító eljárás még 12+8 mellékirányból is töröl, közülük 6+4 az első fázisban, a továbbiak pedig a másodikban kerülnek sorra. A mellékirányok a kocka 12 élközéppontját és a 8 csúcsát a kockaközépponttal összekötő vektoroknak felelnek meg. Eljárásunkat az 5.1. algoritmus írja le. Fontos kihangsúlyozni, hogy mivel az algoritmusban alkalmazott  $R_1$  és  $R_2$  párhuzamos redukciók, így azok egyidejűleg törlik a lokális feltételt kielégítő voxeleket. Az első kétmenetes simító algoritmusunk által törölhető pontokat 13–13 törlőmaszkkal definiáltuk [54]. Az első menethez tartozó törlőmaszkok halmaza:

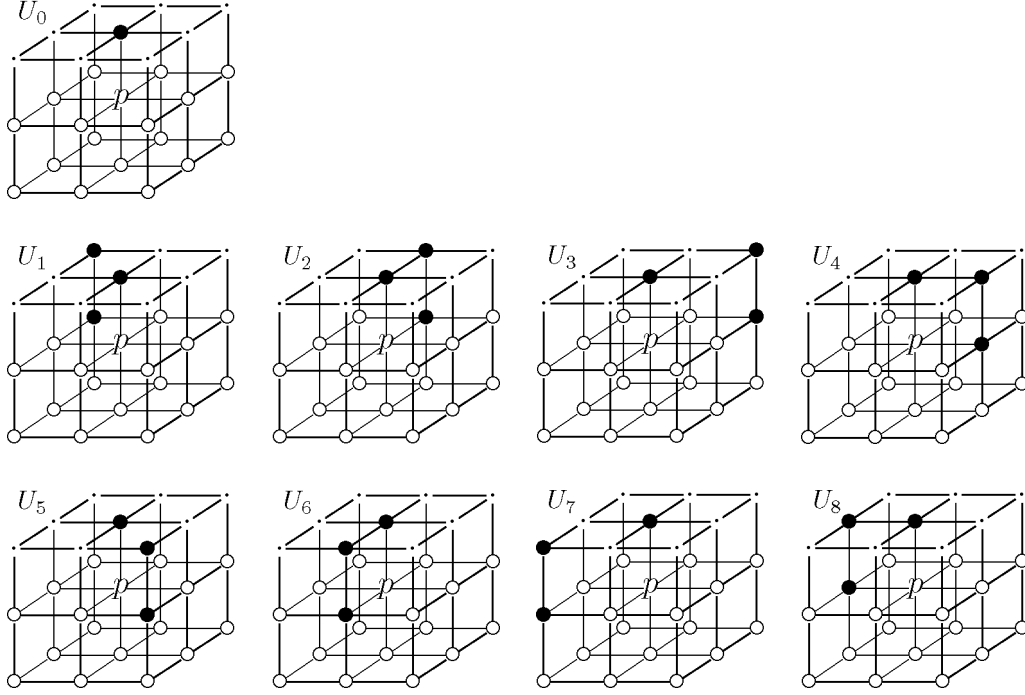
$$\{ U_0, N_0, W_0, UN, UE, US, UW, NW, NE, UNW, UNE, USE, USW \}$$

(lásd 5.1.-5.5. ábrák). Mivel az  $\mathcal{M}_{R_1}$  halmaz 24 további törlőmaszkot ( $U_1, \dots, U_8, N_1, \dots, N_8, W_1, \dots, W_8$ ) is tartalmaz, az új algoritmus sokkal több kiugró határpontot töröl. A 5.6.-5.8. ábrák alapján összehasonlítható a javasolt algoritmusunk az első kísérletünkkel [54]. A zárójelekben szereplő értékek az objektumpontok számát jelzik. Látható, hogy mindkét simító algoritmus korrekt, hiszen nem módosítják az eredeti képen levő sima határszegmenseket (lásd 5.8. ábra).

Kontúrsimító algoritmusunk topológia-megőrző voltát részletesen bizonyítottuk [56]-ban.

**5.1. algoritmus.** Párhuzamos simító algoritmus.

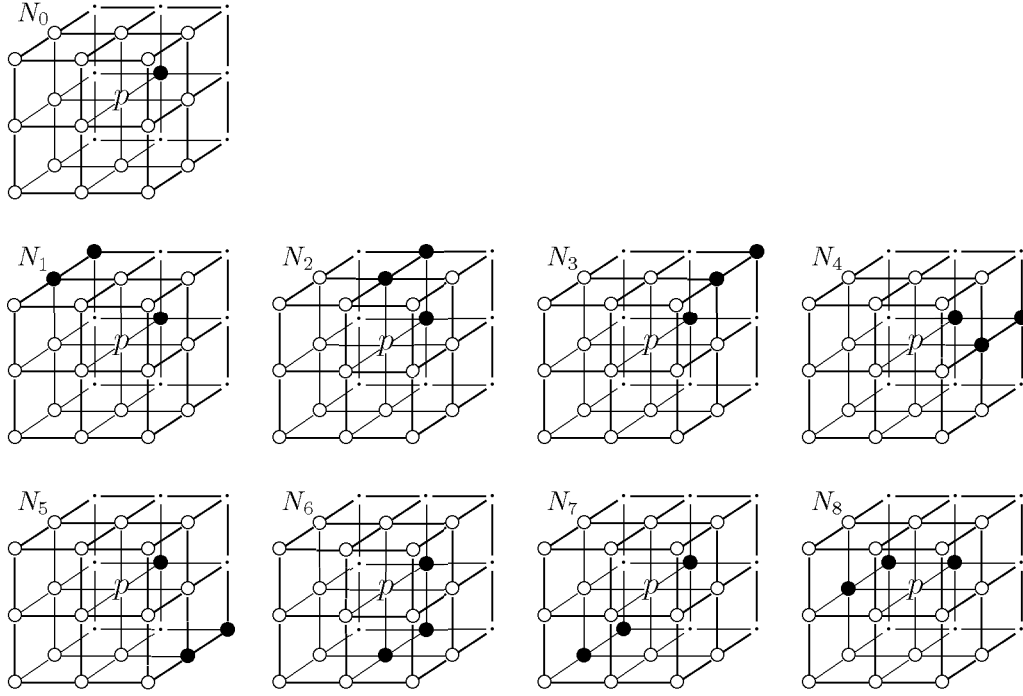
- 
- 1: Input:  $(\mathcal{C}, 3, 1, X)$  kép
  - 2: Output: a  $(\mathcal{C}, 3, 1, Y)$  kép
  - 3:  $Y = X$
  - 4: // 1. fázis
  - 5:  $Y = Y \setminus \{p \mid p \text{ törölhető } R_1 \text{ által a } (\mathcal{C}, 3, 1, Y) \text{ képen}\}$
  - 6: // 2. fázis
  - 7:  $Y = Y \setminus \{p \mid p \text{ törölhető } R_2 \text{ által a } (\mathcal{C}, 3, 1, Y) \text{ képen}\}$
- 

5.1. ábra. Az  $U$  laphoz rendelt  $U_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 8$ ) törlőmaszkok.**5.2. Az új vékonyító séma**

Az előző alfejezetben bemutatott simító algoritmusunkat 3D párhuzamos vékonyító algoritmusokba építettük be. Tekintsünk egy tetszőleges  $A$  vékonyító algoritmust. Az iterációnkénti simítással kombinált vékonyító sémát az 5.2. algoritmus vázolja fel.

Az iterációnkénti kontúrsimítással kombinált vékonyító sémát (a javasolt simító eljárással) számos párhuzamos 3D vékonyító algoritmusra és képre teszteltük. Az 5.10-5.15. ábrákon hatféle 3D párhuzamos vékonyító algoritmussal kapott eredmények láthatóak. A zárójeleken belül feltüntetett értékek az objektumpontok számát jelölik.

A javasolt simító eljárást csak a középfelület meghatározó vékonyító algoritmusokkal javasoljuk kombinálni. A középvonalat előállító 3D vékonyító algoritmusok általában a következő végpixel-feltételt alkalmazzák: egy fekete



5.2. ábra. Az  $N$  laphoz rendelt  $N_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 8$ ) törlőmaszkok.

pixel végpixel, ha pontosan egy valódi 3-szomszédja fekete. Mivel az

$$U_0, N_0, W_0, UN, UE, US, UW, NW, NE, UNW, UNE, USE, USW$$

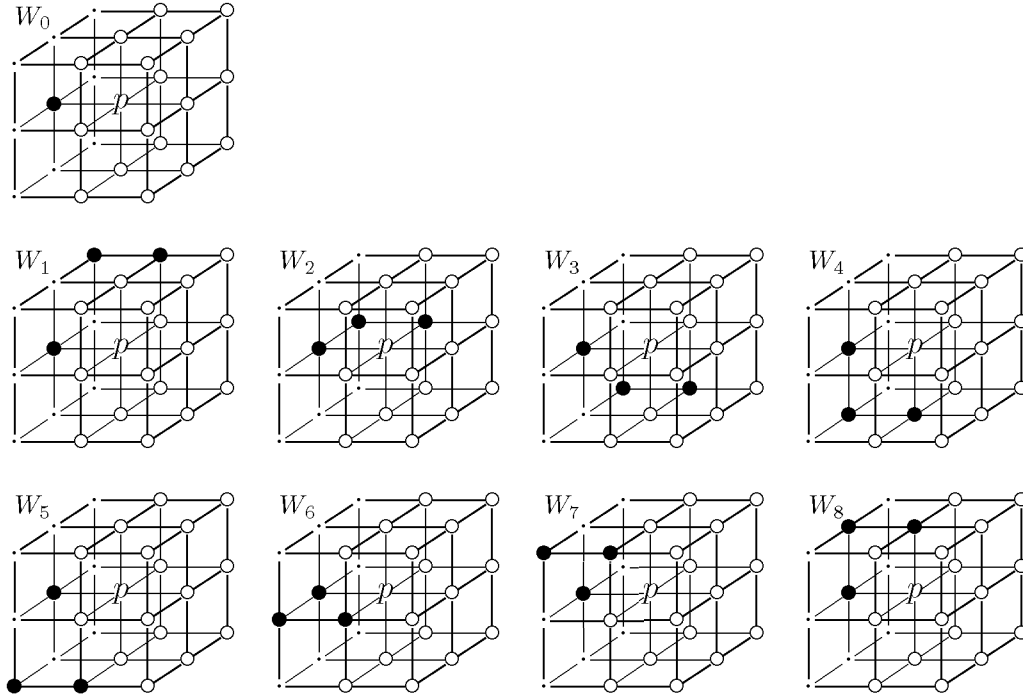
maszkok (lásd 5.1-5.5. ábrák) az ilyen végpixeleket is törlik, így a középvo-nalra vékonyító algoritmusokhoz a fenti 13 maszkot az alábbi megkötés szerint kell módosítani: legalább egy „ $\cdot$ ” jelölésű elemnek egybe kell esnie egy fekete ponttal.

### 5.3. Implementáció

Ha az  $R_1$  és az  $R_2$  redukciók 37-37 törlőmaszkját tekintjük, azt gondolhatjuk, hogy a javasolt algoritmus meglehetősen időigényes és ráadásul nehezen is implementálható szekvenciális számítógépeken. Ezért felvázolunk egy hatékony és általános implementációs módszert, amely párhuzamos vékonyító algoritmusokra is alkalmazható [64, 69].

A javasolt implementáció egyetlen előre kigenerált keresőtáblát használ a törölhető pontok kódolására. Mivel a redukciók  $3 \times 3 \times 3$ -as környezete 26 pontot tartalmaz a kérdéses középső  $p$  pont kivételével (lásd 5.1-5.5. ábrák), a keresőtábla  $2^{26}$  db 1-bites bejegyzést tartalmaz. Könnyű belátni, hogy ez az adatszerkezet mindössze 8 MB-nyi tárolóhelyet igényel.

Minden lehetséges  $3 \times 3 \times 3$ -as konfigurációhoz hozzárendelhető egy  $[0, 2^{26})$ -beli egész szám. Ezt az indexet a  $\sum_{k=0}^{25} 2^k p_k$  képlettel számítjuk. Az  $R_1$  re-

5.3. ábra. A  $W$  laphoz rendelt  $W_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 8$ ) törlőmaszkok.

dukció 5.9(a) ábrán feltüntetett indexelési sémát használja, míg az  $R_2$  esetében ezen séma  $p$  pontra tükrözött változatát, index-permutációját (lásd 5.9(b) ábra) kell figyelembe venni. A keresőtáblánk bejegyzéseit az említett indexekkel címezzük.

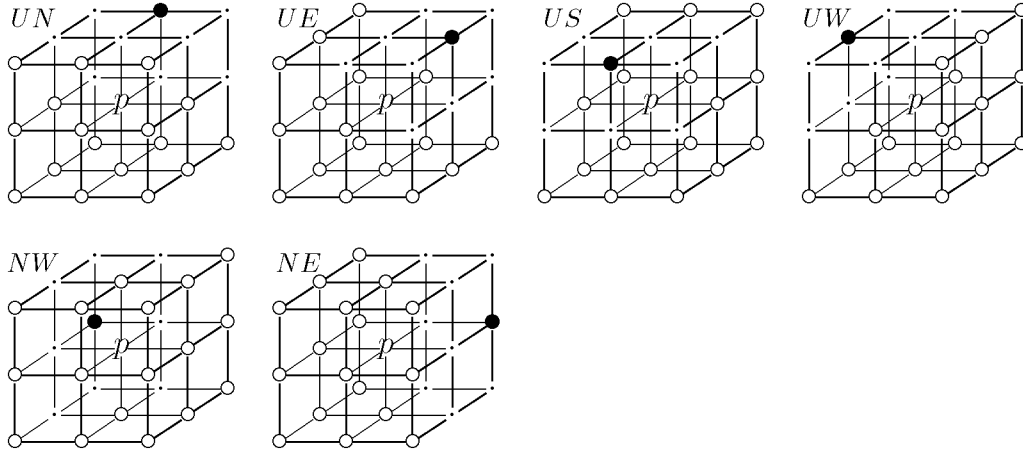
Ezenkívül két lista használata is javasolt az eljárás további gyorsítására. Az egyik lista az aktuális képen levő határpontok tárolására szolgál (mivel az  $R_1$  és  $R_2$  redukciók csak határpontokat törölhetnek, ezért felesleges a teljes képet újra és újra pásztázni). A másik listában az aktuális redukció által törölhető pontokat tároljuk.

Megjegyezzük, hogy a fent leírt módszer párhuzamos vékonyító algoritmusok hatékony implementációjára is alkalmazható [64, 69], így egyúttal az új vékonyító sémákra is hatékony megvalósításhoz jutunk. Gyakorlati alkalmazhatóságát alátámasztják teszteredményeink, melyek alapján a simítással kombinált vékonyítás nagyméretű és egymillió objektumpontot tartalmazó képeken is általában kevesebb, mint 1 másodperc alatt terminál egy szokásos asztali PC-n.

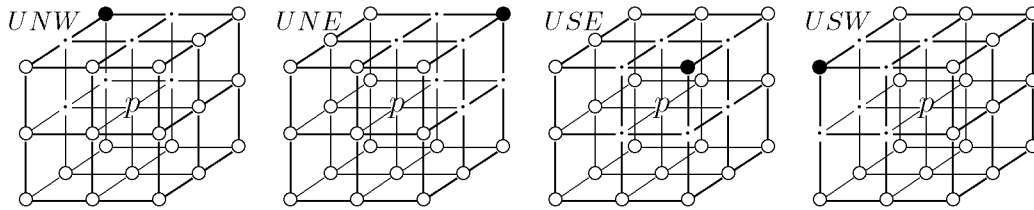
## 5.4. Az új sémán alapuló algoritmusok kiértékelése

A [70]-ben közölt tíz topológia-megőrző vékonyító algoritmusunkat összehasonlítottuk azok iterációnkénti simítással kombinált változataival. Az 5.1-5.8.





5.4. ábra. Az első hat élhez rendelt törlőmaszkok.



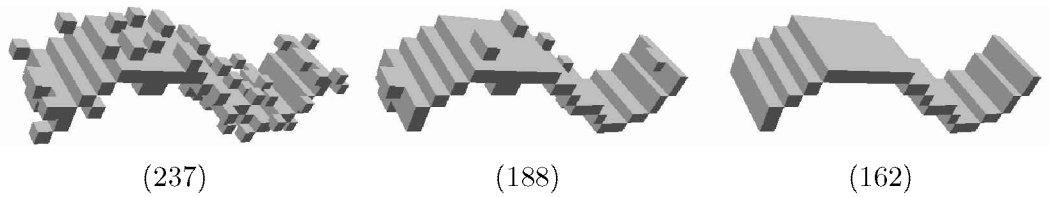
5.5. ábra. Az első négy csúcshoz rendelt törlőmaszk.

táblázatokban nyolc 3D tesztképre látható, hogy az algoritmusok eredeti ill. simítással kombinált változatai hány objektumpontból állnak.

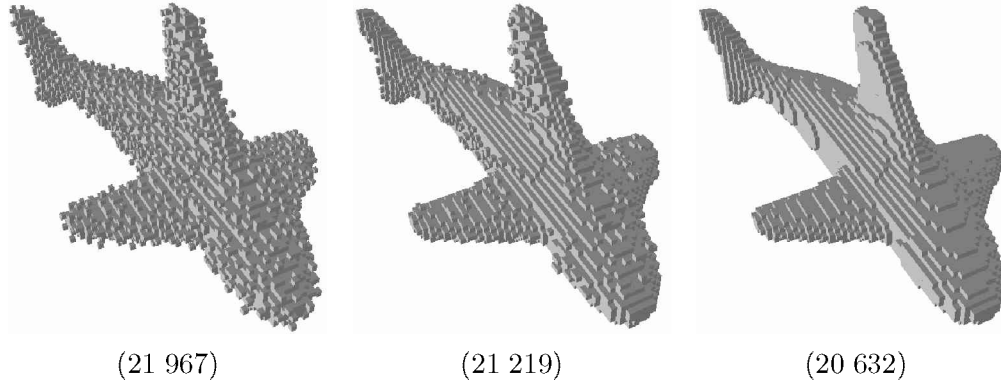
Az algoritmusok mindegyike a második fejezetben bemutatott három fő vékonyító stratégia valamelyikén alapul. Elnevezésükben az FP, SI, SF tagok rendre a teljesen párhuzamos, az irány-alapú és az almező-alapú változatokra utalnak, ezenkívül utóbbi két esetben a névben szereplő számok az al-iterációk, az alkalmazott irányok ill. almezők számát is mutatják. Végül a **CE** és az **SE** utótagok az eljárásban alkalmazott geometriai kényszerfeltételeket jelölik: a **CE** végződésű algoritmusok középvonalakat, az **SE**-re végződő nevek pedig középfelszíneket eredményeznek.

Látható, hogy az iterációnkénti kontúrsimítással kombinált eljárásokkal kevesebb objektumpontot és egyben nemkívánatos szegmenst tartalmazó vázszerű jellemzőket kapunk, mint az eredeti algoritmusokkal. Ezenkívül azt is megállapítottuk, hogy a javasolt új séma szerinti algoritmusok az eredeti változatukhoz képest nem távolítanak el lényeges szegmenseket az objektumok középvonaláról ill. középfelszínéről.





5.6. ábra. Egy  $20 \times 30 \times 10$ -es szalag zajjal terhelt 3D képe (balra), az első algoritmusunkkal [54] előállított simított kép (középen) és a továbbfejlesztett eljárás eredménye [56] (jobbra).



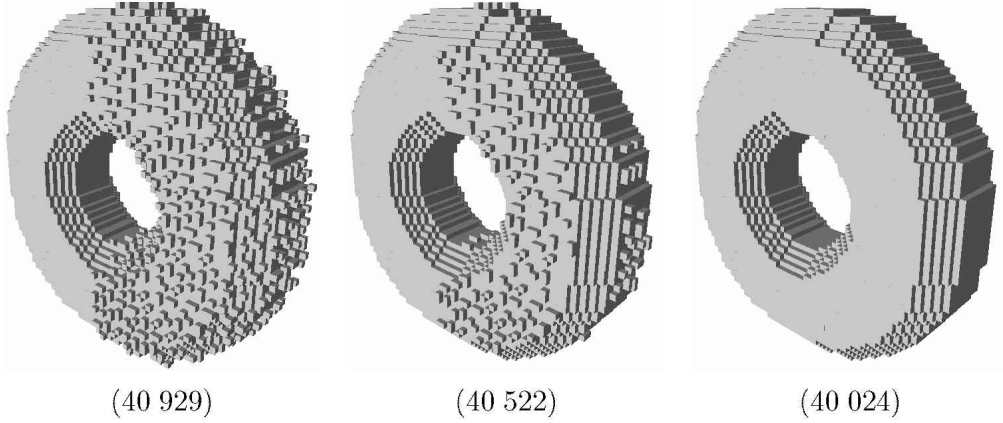
5.7. ábra. Egy  $103 \times 42 \times 60$ -as cápa zajjal terhelt 3D képe (balra), az első algoritmusunkkal [54] előállított simított kép (középen) és a továbbfejlesztett eljárás eredménye [56] (jobbra).

## 5.5. Összefoglalás és távlati célok

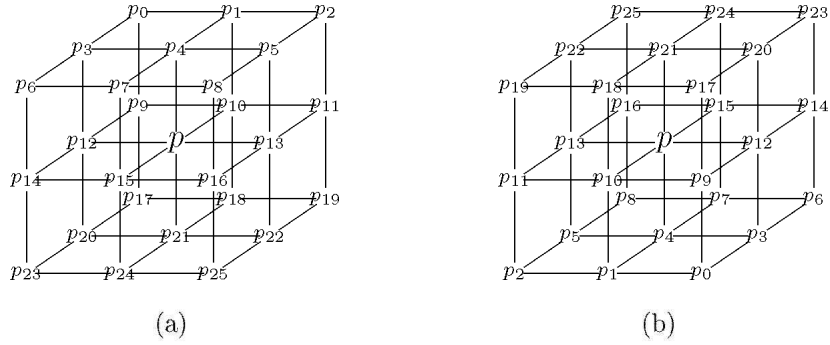
Ebben a fejezetben a második tézispontához tartozó eredményeket tárgyaltam. Bemutattam egy 3D kontúrsimító algoritmust  $(C, 3, 1)$  képekre. A simító eljárás számos 1- és 2 pontból álló kontúrjait képes eltávolítani. Simító algoritmusunkat a hagyományos vékonyító eljárásokkal kombináltuk abból a célból, hogy csökkentsük a vékonyító algoritmusok által produkált nemkívánatos szegmensek számát. A javasolt séma iterációs lépései egy simító és egy vékonyító fázisból állnak. Eképpen implementáltuk számos konvencionális vékonyító algoritmusnak a javasolt kontúrsimító eljárással kombinált változatát, és számos képen teszteltük az új vékonyító séma hatékonyságát. Az eredmények egyértelműen alátámasztják azt, hogy a javasolt módszerrel jelentősen kevesebb nemkívánatos felszín- ill. vonal-szegmenst tartalmazó vázszerű jellemzőkhöz jutunk.

Kontúrsimító algoritmusunk első változatát egy konferencia kiadványban [54], míg a továbbfejlesztett eljárást és az iterációnkénti simítással kombinált vékonyító sémát pedig egy hatástényező folyóiratcikkben [56] publikáltuk.

A későbbiekben módszerünket szeretnénk oly módon tökéletesíteni, hogy a kontúrsimítás során ne csak a kis kiugrások legyenek levágva az objektum határáról, hanem az 1- ill. 2 pontból álló kisebb „gödrök” is feltöltésre kerül-

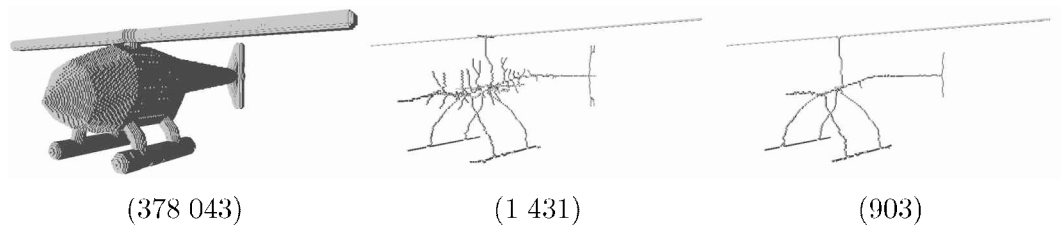


5.8. ábra. Egy  $64 \times 64 \times 19$ -es tórusz zajjal terhelt 3D képe (balra), az első algoritmusunkkal [54] előállított simított kép (középen) és a továbbfejlesztett eljárás eredménye [56] (jobbra). Látható, hogy a sima határszegmenseket nem módosította egyik algoritmus sem.

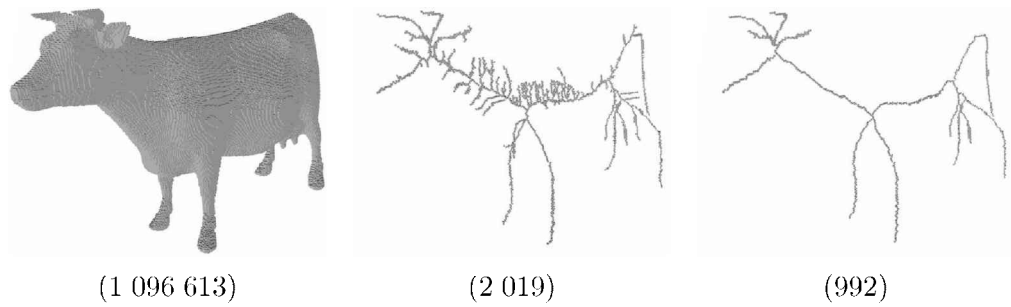


5.9. ábra. A javasolt módszer első (b) ill. második (c) redukciójánál alkalmazott indexelési sémák.

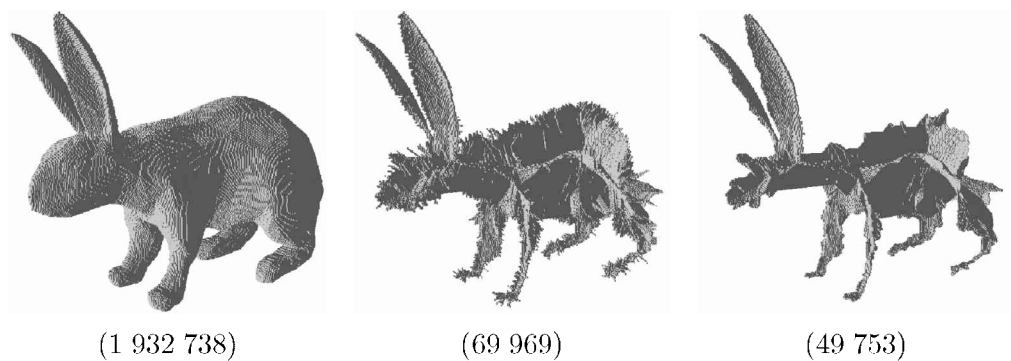
jenek. E célból a kombinált sémának egy olyan továbbfejlesztését tervezzük, amely az eddigi, redukciós simító fázis után egy addíciós simító fázist is tartalmazna. Ugyancsak ez inspirálja azirányú kutatásaimat, hogy vegyes (törlést és kitöltést egyidejűleg lehetővé tevő) képműveletek topológiai jellemzésével is foglalkozzak. Ezen területen az első eredményeinket [30]-ban közzétettük.



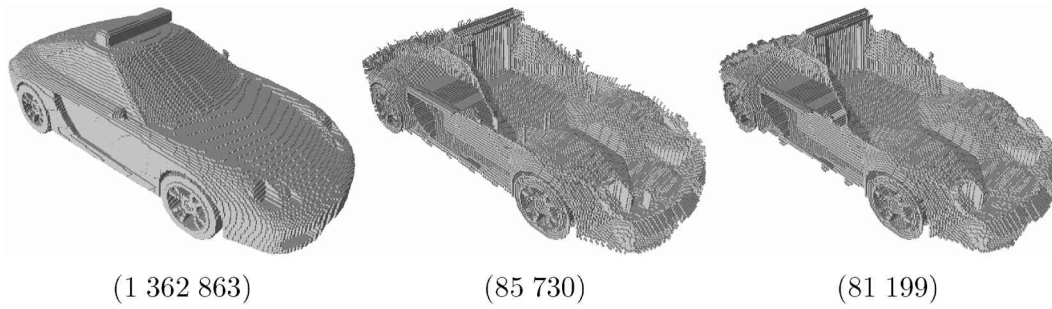
5.10. ábra. Egy  $304 \times 96 \times 261$ -es helikopter (balra), a Palágyi és Kuba által javasolt 6-irányú irányszekvenciális vékonyító algoritmussal [66] előállított középvonala (középen), és az algoritmus iterációnkénti simítással kombinált változatának eredménye [56] (jobbra).



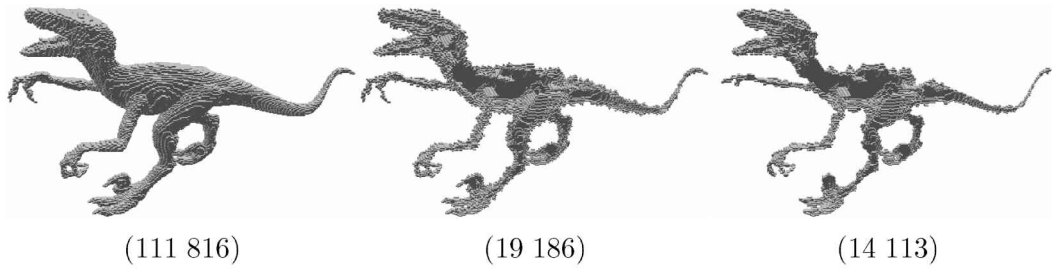
5.11. ábra. Egy  $175 \times 93 \times 285$ -ös tehén (balra), a Bertrand és Aktouf által javasolt 8-almezős vékonyító algoritmussal [3] előállított középvonala (középen), és az algoritmus iterációnkénti simítással kombinált változatának eredménye [56] (jobbra).



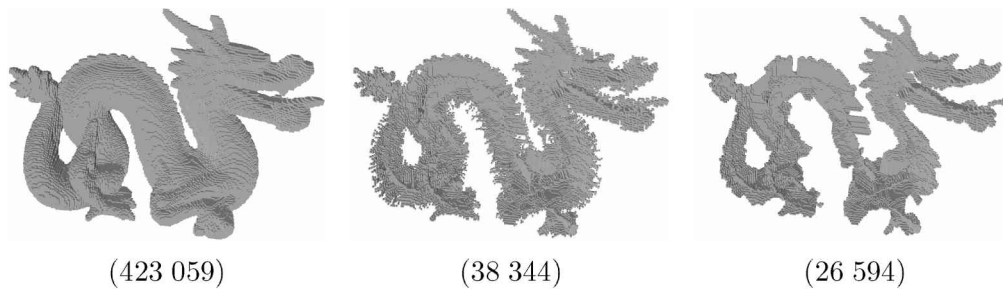
5.12. ábra. Egy  $124 \times 207 \times 300$ -as nyúl (balra), a Gong és Bertrand által javasolt 6-irányú, felszínre vékonyító irányszekvenciális algoritmussal [12] előállított középfelvétele (középen) és az algoritmus iterációnkénti simítással kombinált változatának eredménye [56] (jobbra).



5.13. ábra. Egy  $139 \times 90 \times 285$ -ös autó (balra), a Németh, Kardos és Palágyi által javasolt 2-almezős vékonyító algoritmussal [57] előállított középfelszíne (középen), és az algoritmus iterációnkénti simítással kombinált változatának eredménye [56] (jobbra).



5.14. ábra. Egy  $59 \times 285 \times 139$ -es raptor (balra), a Manzanera és társai által javasolt teljesen párhuzamos vékonyító algoritmussal [49] előállított középfelszíne (középen), és az algoritmus iterációnkénti simítással kombinált változatának eredménye [56] (jobbra).



5.15. ábra. Egy  $135 \times 86 \times 191$ -es sárkány (balra), a Németh, Kardos és Palágyi által javasolt 8-almezős vékonyító algoritmussal [58] előállított középfelszín (középen), és az algoritmus iterációnkénti simítással kombinált változatának eredménye [56] (jobbra).

**5.2. algoritmus.** Iterációnkénti simítással kombinált vékonyítás.

---


```

1:  $Y = X$ 
2: repeat
3:   Input:  $(\mathcal{C}, 3, 1, X)$  kép
4:   Output:  $(\mathcal{C}, 3, 1, Y)$  kép
5:    $Y = X$ 
6:   // kétfázisú simítás
7:    $Y = Y \setminus \{ p \mid p \text{ törölhető } R_1 \text{ által a } (\mathcal{C}, 3, 1, Y) \text{ képen } \}$ 
8:    $Y = Y \setminus \{ p \mid p \text{ törölhető } R_2 \text{ által a } (\mathcal{C}, 3, 1, Y) \text{ képen } \}$ 
9:   // a vékonyítás egy iterációs lépése
10:   $D = \{ p \mid p \text{ törölhető } A \text{ által a } (\mathcal{C}, 3, 1, Y) \text{ képen } \}$ 
11:   $Y = Y \setminus D$ 
12: until  $D = \emptyset$ 

```

---


5.1. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $336 \times 133 \times 381$  méretű, 3 833 504 voxelből álló objektumra.

	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	6943	2856
3D-FP- <b>SE</b>	133076	128401
3D-6-SI- <b>CE</b>	4104	2867
3D-6-SI- <b>SE</b>	114068	113556
3D-2-SF- <b>CE</b>	8158	1247
3D-4-SF- <b>CE</b>	9111	1507
3D-8-SF- <b>CE</b>	4694	1611
3D-2-SF- <b>SE</b>	85593	81506
3D-4-SF- <b>SE</b>	73143	69971
3D-8-SF- <b>SE</b>	77911	74543


5.2. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $381 \times 352 \times 275$  méretű, 8 434 204 voxelből álló objektumra.

	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	12033	4699
3D-FP- <b>SE</b>	322871	317281
3D-6SI- <b>CE</b>	3657	3149
3D-6SI- <b>SE</b>	231641	230701
3D-2-SF- <b>CE</b>	9767	2870
3D-4-SF- <b>CE</b>	20135	2856
3D-8-SF- <b>CE</b>	8768	2954
3D-2-SF- <b>SE</b>	197570	188899
3D-4-SF- <b>SE</b>	165403	159174
3D-8-SF- <b>SE</b>	178697	169095


5.3. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $175 \times 93 \times 285$  méretű, 1 096 659 voxelből álló objektumra.

	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	1830	1043
3D-FP- <b>SE</b>	25875	20776
3D-6-SI- <b>CE</b>	1078	1005
3D-6-SI- <b>SE</b>	10178	9933
3D-2-SF- <b>CE</b>	1736	1064
3D-4-SF- <b>CE</b>	1369	1070
3D-8-SF- <b>CE</b>	1134	992
3D-2-SF- <b>SE</b>	10521	9811
3D-4-SF- <b>SE</b>	9203	8339
3D-8-SF- <b>SE</b>	9876	8808


5.4. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $348 \times 130 \times 215$  méretű, 1 244 162 voxelből álló objektumra.

	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	1618	639
3D-FP- <b>SE</b>	44266	40081
3D-6-SI- <b>CE</b>	889	767
3D-6-SI- <b>SE</b>	21163	21068
3D-2-SF- <b>CE</b>	884	769
3D-4-SF- <b>CE</b>	1025	854
3D-8-SF- <b>CE</b>	1104	881
3D-2-SF- <b>SE</b>	25460	25319
3D-4-SF- <b>SE</b>	24306	24061
3D-8-SF- <b>SE</b>	24501	24274


5.5. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $381 \times 293 \times 270$  méretű, 4 417 773 voxelből álló objektumra.

	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	7802	2293
3D-FP- <b>SE</b>	107151	93162
3D-6-SI- <b>CE</b>	2842	2258
3D-6-SI- <b>SE</b>	54055	53374
3D-2-SF- <b>CE</b>	5393	2717
3D-4-SF- <b>CE</b>	4582	2682
3D-8-SF- <b>CE</b>	4058	2601
3D-2-SF- <b>SE</b>	52418	49295
3D-4-SF- <b>SE</b>	49497	45834
3D-8-SF- <b>SE</b>	50739	46162

5.6. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $59 \times 285 \times 139$  méretű, 111 816 voxelből álló objektumra.


	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	1046	844
3D-FP- <b>SE</b>	9877	8785
3D-6-SI- <b>CE</b>	944	916
3D-6-SI- <b>SE</b>	6707	6475
3D-2-SF- <b>CE</b>	990	928
3D-4-SF- <b>CE</b>	1137	937
3D-8-SF- <b>CE</b>	970	913
3D-2-SF- <b>SE</b>	6144	5795
3D-4-SF- <b>SE</b>	5707	5276
3D-8-SF- <b>SE</b>	5700	5310

5.7. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $105 \times 129 \times 380$  méretű, 386 372 voxelből álló objektumra.

	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	4473	1813
3D-FP- <b>SE</b>	71397	61717
3D-6-SI- <b>CE</b>	1545	1485
3D-6-SI- <b>SE</b>	28646	28570
3D-2-SF- <b>CE</b>	3382	1490
3D-4-SF- <b>CE</b>	1821	1511
3D-8-SF- <b>CE</b>	1922	1399
3D-2-SF- <b>SE</b>	35908	34641
3D-4-SF- <b>SE</b>	33962	32491
3D-8-SF- <b>SE</b>	34567	32864



5.8. táblázat. A kiértékelésbe bevont tíz algoritmus eredeti és iterációnkénti kontúrsimítással kombinált változatának összehasonlítása egy  $336 \times 381 \times 134$  méretű, 2 869 989 voxelből álló objektumra.

	Vázpontok száma (eredeti)	Vázpontok száma (simított)
3D-FP- <b>CE</b>	876	577
3D-FP- <b>SE</b>	21957	20656
3D-6-SI- <b>CE</b>	706	656
3D-6-SI- <b>SE</b>	12944	12796
3D-2-SF- <b>CE</b>	927	697
3D-4-SF- <b>CE</b>	1077	785
3D-8-SF- <b>CE</b>	1025	728
3D-2-SF- <b>SE</b>	14922	14574
3D-4-SF- <b>SE</b>	13797	13414
3D-8-SF- <b>SE</b>	14553	14148



## 6. fejezet

# Bejárás-független szekvenciális vékonyítás

Ebben a fejezetben az ún. bejárás-függetlenség problémájával foglalkozom. A szekvenciális vékonyítás sémáját bemutató 2.1. algoritmusban nincs lerögzítve a határelemek meglátogatási sorrendje. Ezt a sorrendet különbözőféleképpen megválasztva gyakran más és más eredményt adhat egy adott szekvenciális eljárás. Kutatásom egyik célja olyan szekvenciális vékonyító eljárások kidolgozása volt, amelyek tetszőleges bejárasi stratégia mellett ugyanazt a vázközelítést állítják elő. Az ilyen vékonyító algoritmusokat *bejárás-független*nek nevezzük.

Az algoritmusok bejárasi sorrendtől való függősége arra az alapproblémára vezethető vissza, hogy bár bizonyos képelem-konfigurációk csupa egyszerű képelemekből állnak, azok nem alkotnak egyszerű halmazt. A szekvenciális vékonyító eljárás ugyanis az ilyen kritikus konfigurációk utolsóként meglátogatott, nem-egyszerűvé vált képelemeit már nem törölheti a topológia-megőrzés elvárása miatt.

Bejárás-független eljárásokat először Ranwez és Soille, majd Iwanowski és Soille javasoltak 2D képekre [19, 72]. Ezek az említett kritikus képelem-konfigurációk detektálásával és az elemeik megtartásával biztosítják a bejárás-függetlenséget. Hátrányuk azonban, hogy nem alkalmaznak geometriai kényszerfeltételeket, így önmagukban csupán olyan zsugorító eljárásként funkcionálnak. Alakmegőrző vékonyításra csak úgy alkalmazhatóak, ha egy előfeldolgozó lépésben kijelölünk bizonyos horgonypontokat az objektumokon, amelyek nem törölhetők.

Kutatásom első eredményeként [22]-ben javasoltunk egy olyan 2D bejárás-független szekvenciális algoritmust, amely egy beépített végpixelfeltételnek köszönhetően nem igényel az előző eljárásoknál említett előfeldolgozó lépést. Az algoritmus az egyszerű képelemek osztályozásán alapul: az első fázisban  $3 \times 3$ -as környezetük alapján négy csoportba sorolja a megjelölt egyszerű határpixelet. Ily módon összehasonlítva azokat egyértelműen dönthetünk arról, hogy a bejárás-függetlenség szempontjából kritikus pixelkonfigurációk mely pixelét/pixeleit töröljük, és melyiket őrizzük meg. Ezáltal vékonyabb, kevesebb

objektumpontot tartalmazó vázszerű jellemzőket kapunk, mint a [72]-ben és a [19]-ben közölt eljárásokkal. Algoritmusunknak [21]-ben egy továbbfejlesztett változatát közöltük, mely „maximálisan vékonyít”, azaz egyetlen olyan egyszerű pixelt sem őriz meg a képen, ami nem végpixel. Azonban az említett két algoritmusunk az első fázisban – a pixelek osztályozásakor – alkalmazott vizsgálatok miatt nagy mértékben eltér a hagyományos szekvenciális vékonyító sémától, ezért azok tényleges szekvenciális jellege vitatható. Ezenkívül a viszonylag sok esetet ellenőrző, bonyolult törlési feltételeik az implementációt megnehezítik.

A fejezet további részében először a bejárás-függetlenségre fogalmazok meg szükséges ill. elegendő feltételeket. Ezt követően pedig ezeket a kritériumokat kielégítő algoritmusainkat mutatom be.

## 6.1. A bejárás-függetlenség szükséges és elegendő feltételei

Az eredmények prezentálása előtt további fogalmak ismertetése szükséges. Az alábbiakban megadom a bináris képek egyfajta kiterjesztését, valamint ismeretlem az törlőmaszkokkal megadott szekvenciális algoritmusok sémáját (néhány kapcsolódó fogalommal együtt), amelyek bejárás-függetlenségére külön feltételeket dolgoztam ki.

A bejárás-függetlenség problémáját csak az ortogonális képrácsokkal duális mozaikokon mintavételezett képekre vizsgáltam. Az  $n$ -dimenziós  $\mathbb{Z}^n$  ráccsal duális mozaikot  $\mathcal{C}^n$ -nel is jelölöm, vagyis  $\mathcal{C}^2 = \mathcal{S}$  és  $\mathcal{C}^3 = \mathcal{C}$ .

A vizsgált  $n$ -dimenziós mozaikok képelemei között általában  $n$ -féle szomszédságot vesznek figyelembe: a  $\mathcal{C}^n$  mozaik két eleme  $m$ -szomszédos, ha a duális rácson legfeljebb  $m$  koordinátában térhetnek el egymástól 0 vagy  $\pm 1$  értékkel ( $m = 1, 2, \dots, n$ ).

A fejezet további részében a  $(\mathcal{C}^n, n, 1)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) képekre szorítkozom és bevezetem a címkézett  $(\mathcal{C}^n, n, 1)$  képek fogalmát. Egy címkézett kép a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, B, B^+)$  ötössel írható le, melynek első négy tagja a hagyományos digitális bináris képeket megadó rendezett négyesnek felel meg, az ötödik tag,  $B^+$  az ún. *aktív fekete képelemek* halmaza, míg a  $B \setminus B^+$  halmaz az *inaktív fekete képelemek* tartalmazza. Legyen  $\mathcal{M}$  egy maszk-halmaz,  $p$  pedig egy  $(\mathcal{C}^n, n, 1, B, B^+)$  kép objektumának képeleme. A  $p$ -t  $\mathcal{M}$ -*törölhetőnek* nevezzük, ha valamely  $M \in \mathcal{M}$  törlőmaszk illeszkedik rá.

A törlőmaszkokkal megadott szekvenciális vékonyítás sémáját a 6.1. algoritmus mutatja be. A továbbiakban feltételezzük, hogy  $V = \mathcal{S}$ .

Egy  $M$  törlőmaszkot *egyértelműnek* nevezzük, ha annak mindegyik cellája („-tól különböző) fekete vagy fehér szimbólumot tartalmaz, vagyis a maszk mindegyik pozícióján egyértelműen meghatározott színű pixelek szerepelnek. Adott  $m \times m$ -es  $M$  törlőmaszk *egyértelmű változatán* olyan egyértelmű  $M'$  maszkot értünk, amelynek tetszőleges  $(x, y)$  ( $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$ ) pozícióján

**6.1. algoritmus.**  $ST(\mathcal{M})$ 


---

```

1: Input: a  $(C^n, n, 1, X, \emptyset)$  kép és a törlőmaszkok  $\mathcal{M}$  halmaza
2: Output: a  $(C^n, n, 1, Y, Y^+)$  kép
3:  $Y = X$ 
4:  $Y^+ = \emptyset$ 
5: repeat
6:   // első fázis: kontúr-követés
7:   for all  $p$  in  $Y$  do
8:     if  $p$  határpixel then
9:        $Y^+ = Y^+ \cup \{p\}$ 
10:  // második fázis: redukció
11:  modified=false
12:  for all  $p \in Y^+$  do
13:    if  $p$   $\mathcal{M}$ -törölhető then
14:       $Y = Y \setminus \{p\}$ 
15:      modified=true
16: until modified=false

```

---

levő pixelek teljesítik az alábbi feltételeket:

- ha az adott cella aktív fekete/inaktív fekete/fehér szimbólumot tartalmaz, akkor  $M'(x, y)$  pozícióján levő cella is aktív fekete/inaktív fekete/fehér pixelt jelöl;
- ha az adott cella „-”-ot tartalmaz, akkor  $M'$  ugyanezen pozíciójának megfelelő cella aktív fekete vagy fehér pixelt jelöl.

Legyen  $M$  egy egyértelmű törlőmaszk. Azt mondjuk, hogy egy  $\mathcal{P} = (\mathcal{S}, 2, 1, B, B^+)$  kép tartalmazza  $M$ -et, ha  $\mathcal{P}$ -nek van olyan  $m \times m$ -es régiója, amelynek középső pixelére illeszthető az  $M$  maszk. Az  $\mathcal{M}$ -törölhetőség fogalmát 2D képek pixelein kívül 2D törlőmaszkok pozícióira is alkalmazni fogjuk az alábbi értelmezés szerint:  $M \in \mathcal{M}$  maszk adott  $(x, y)$  pozícióján jelölt pixelt  $\mathcal{M}$ -törölhetőnek nevezünk, ha megadható olyan  $\mathcal{P}$  kép, amely tartalmazza  $M$ -et, és a  $\mathcal{P}$  kép  $M$ -mel illeszthető régiójának  $(x, y)$  pozícióján levő pixel  $\mathcal{M}$ -törölhető.

Legyenek  $M, M'$  olyan maszkok, hogy  $M'$  az  $M$ -től csak egy adott pozíción levő  $q$  pixelben tér el, nevezetsen  $q$  határpixelt jelöl az  $M'$  maszkon, míg  $M$ -en olyan háttérpontként szerepel, amely se nem izolált üregpixel se nem olyan határpixel 1-szomszédja, amelynek  $q$  az egyedüli fehér 1-szomszédja. Ekkor  $q$ -t  $M$  és  $M'$  *különbségpixelének*,  $M'$ -et pedig az  $M$  *kontúrbővített változatának* nevezzük.

Az alábbi elegendő feltételeket [20]-ban bizonyítottam.

**6.1.1. tétel.** [20] *Az  $ST(\mathcal{M})$  algoritmus bejárás-független, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

1.  $\mathcal{M}$  tetszőleges  $M \in \mathcal{M}$  törlőmaszkján a középső pixelen kívül eső fekete pixelek egyike sem  $\mathcal{M}$ -törölhető.

2. Legyen  $q$  egy tetszőleges  $M \in \mathcal{M}$  törlőmaszk tetszőleges  $M'$  kontúrbővítettjének és  $M$ -nek különbségpíxele. Akkor  $M'$ -n  $q$  nem  $\mathcal{M}$ -törölhető.

Könnyű belátni, hogy tetszőleges szekvenciális vékonyító algoritmus törlési feltétele felírható az említett tulajdonságokkal rendelkező törlőmaszkok segítségével, így ekkor az eredetileg nem törlőmaszkokkal megadott vékonyító algoritmusok bejárás-függetlenségét is ellenőrizhetnénk a 6.1.1. tétel feltételeivel. Ennek a megközelítésnek hátránya, hogy bizonyos algoritmusok esetén a törlési feltétel átírása az említett módon olyan sok maszkot igényelne, hogy ily módon a bejárás-függetlenség bizonyítása bonyolulttá válna.

Ezért [29]-ben olyan kritériumokat is javasoltam, amelyek nem szorítkoznak a törlőmaszkokkal megadott algoritmusokra, és amelyek egyben szükséges és elegendő feltételek is. Ezen összefüggések megfogalmazásához egy újabb fogalmat kell bevezetni.

**6.1.1. definíció.** [29] Legyen  $ST$  egy szekvenciális vékonyító algoritmus,  $ST^*$  pedig egy párhuzamos vékonyító algoritmus, amelynek második fázisa ugyanazt a törlési feltételt tartalmazza, mint az  $ST$  azzal az eltéréssel, hogy  $ST^*$  a feltételnek megfelelő objektumpontokat egyszerre törli.  $ST^*$  algoritmust az  $ST$  párhuzamos változatának nevezzük.

**6.1.2. tétel.** [29] Legyen  $ST$  egy szekvenciális vékonyító algoritmus, és legyen  $ST^*$  az  $ST$  párhuzamos változata. Tekintsük  $ST$  és  $ST^*$  adott iterációs lépését, továbbá legyen  $\mathcal{P} = (C^n, n, 1, B)$  egy tetszőleges kép ( $n = 2, 3$ ), és legyen  $D \subseteq B$  az  $ST^*$  által a bemeneti  $\mathcal{P}$  képen a vizsgált iterációban törölt pontok halmaza.  $ST$  bejárás-független akkor és csak akkor ha bármely  $p \in B$  pontra az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

1.  $p \in D$ , és bármely  $Q \subseteq D \setminus \{p\}$  halmazra  $ST^*$  a  $p$  pontot törli a bemeneti  $(C^n, n, 1, B \setminus Q)$  képen, vagy
2.  $p \notin D$ , és bármely  $Q \subseteq D \setminus \{p\}$  halmzra  $ST^*$  nem törli  $p$ -t a bemeneti  $(C^n, n, 1, B \setminus Q)$  képen.

## 6.2. Bejárás-független szekvenciális vékonyító algoritmusok

Az alfejezetben bemutatott algoritmusok az alábbi (végelemek ill. szűkületi pontok megőrzésén alapuló) geometriai kényszerfeltételeket alkalmazzák.

**6.2.1. definíció.** A  $p \in B$  képelem a  $(C^n, n, 1, B, B^+)$  képen  $e_j^n$ -végelem, ha az  $N_j^{C^n}(p)$  halmaz nem tartalmaz inaktív fekete képelemet  $N_j^{C^n}(p)$  ( $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ).

**6.2.2. definíció.** [3] *A  $p$  határpixel a  $(\mathcal{S}, 2, 1, B)$  képen  $\mathcal{I}_C^2$  szűkületi pont, ha az  $N_2^{*\mathcal{S}}(p) \cap B$  halmaz egynél több 2-komponenset tartalmaz (vagyis az 1.2.1. tétel 2. feltétele sérül).*

**6.2.3. definíció.** [3] *A  $p$  határvoxel a  $(\mathcal{C}, 3, 1, B)$  képen  $\mathcal{I}_C^3$  szűkületi pont, ha az  $N_3^{*\mathcal{C}}(p) \cap B$  halmaz egynél több 3-komponenset tartalmaz (vagyis az 1.2.2. tétel 1. feltétele nem teljesül).*

**6.2.4. definíció.** [3] *A  $p$  határvoxel a  $(\mathcal{C}, 3, 1, B)$  képen  $\mathcal{I}_S^3$  szűkületi pont, ha  $p$  nem egyszerű voxel (vagyis az 1.2.2. tétel 1. vagy 3. feltétele nem teljesül).*

### 6.2.1. Algoritmusok törlőmaszkokkal adott törlési feltételekkel

Először a [20]-ban javasolt  $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$  maszk-halmazokat ismertetem.

A 6.1. ábrán látható  $M_a - M_l$   $5 \times 5$ -ös törlőmaszkokon a „●” és „◆” elemek egy-egy aktív fekete pixelt, míg a „★” jelölésű elemek inaktív fekete pontokat jelölnek. A fehér maszk-elemek fehér pontokra utalnak.

A  $\mathcal{M}^1$  és  $\mathcal{M}^2$  maszk-halmazt a 6.1. ábrán bemutatott maszkok alapján határozzuk meg. Legyen  $M_x^1 = M_x$ ,  $M_y^2 = M_y$  ( $x \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ ,  $y \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l\}$ ) azzal a megkötéssel, hogy a „⊙” jelölésű pixelek az  $M_y^2$  maszkokon „don't care”-nek számítanak, míg, az  $M_x^1$  maszkokon aktív fekete pixelek vagy fehér pixelek. Ezek alapján bevezetjük a

$$\mathcal{M}_{base}^1 = \{M_x^1 \mid x \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}\},$$

$$\mathcal{M}_{base}^2 = \{M_y^2 \mid y \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l\}\}$$

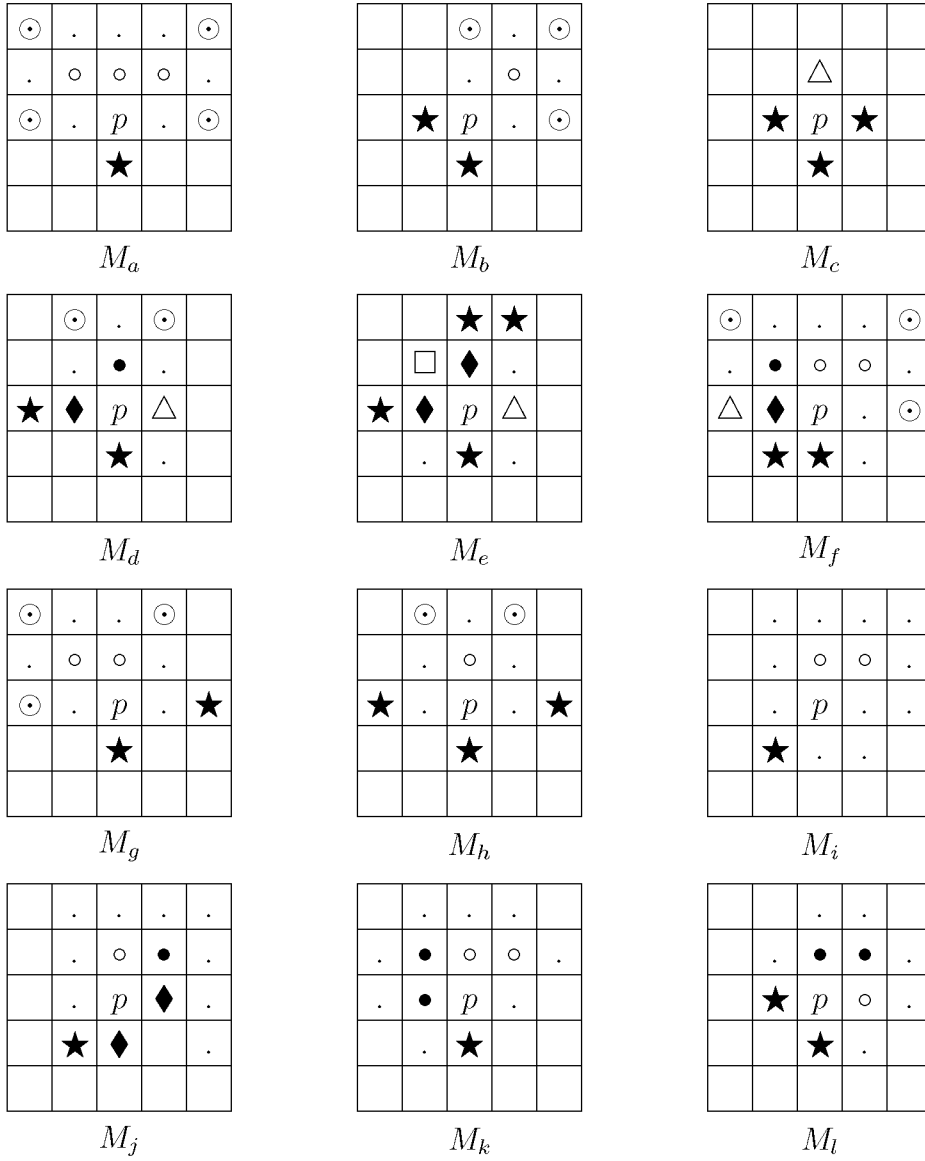
halmazokat. Végül a javasolt  $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$  halmazok a  $\mathcal{M}_{base}^1, \mathcal{M}_{base}^2$  elemeit (lásd a 6.1. ábra), valamint azok  $k \cdot 90$  fokos elforgatottjait és tükrözöttjeit ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ). A  $\mathcal{M}_x^1$  ill.  $\mathcal{M}_y^2$  jelölésekkel a  $M_x^1$  ill.  $M_y^2$  maszkok és említett elforgatottjainak valamint tükrözöttjeinek halmazaira utalunk.

[20]-ban bizonyítottam azt, hogy az említett maszkokkal megadott  $ST(\mathcal{M}^1)$  és  $ST(\mathcal{M}^2)$  algoritmusok teljesítik a 6.1.1. tétel feltételeit, tehát  $ST(\mathcal{M}^1)$  és  $ST(\mathcal{M}^2)$  bejárás-függetlenek.

### 6.2.2. További algoritmusok

Következzen néhány olyan szekvenciális eljárás, amelyek a képelemek törölhetőségéről törlőmaszkok helyett formális feltételek alapján döntenek.

Elsőként a tetszőleges  $n$ -dimenziójú  $(\mathcal{C}^n, n, 1)$  képekre használható  $ST-e_1^n$  eljárást tárgyalom [25], melynek elnevezése arra utal, hogy az algoritmus az  $e_1^n$ -végelemeket őrzi meg. Az eljárás, melyet a 6.2. algoritmus ír le, 2D objektumok középvonalaának ill. 3D objektumok középfelületének kinyerésére alkalmas.



6.1. ábra. A  $\mathcal{M}_{base}^1$  és  $\mathcal{M}_{base}^2$  illesztőminta-halmazok. Jelölések: minden „ $\bullet$ ” és „ $\blacklozenge$ ” jelölésű pozíció egy-egy aktív fekete pontnak felel meg; a „ $\star$ ” szimbólummal ellátott pozíciók egy-egy inaktív fekete pontot jelölnek; a „ $\circ$ ”, „ $\square$ ”, és „ $\triangle$ ” jelölésű pozíciók háttérpontokra utalnak; a „ $\cdot$ ” jelölésű cellák helyén aktív fekete pont vagy fehér pont szerepelhet; az üres cellák ún. „don’t care” pontokat szimbolizálnak, amelyek helyén akár (aktív vagy inaktív) fekete pont, akár fehér pont is szerepelhet; a „ $\odot$ ” szimbólumokat „ $\cdot$ ”-nek kell tekinteni  $\mathcal{M}^1$  halmaz maszkjain, és „don’t care” pontként kell értelmezni  $\mathcal{M}^2$  maszkjain.



**6.2. algoritmus.** ST- $e_1^n$ 


---

```

1: Input: a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, X, \emptyset)$  kép
2: Output: a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, Y, Y^+)$  kép
3:  $Y = X$ 
4: repeat
5:   // első fázis: kontúr-követés
6:    $Y^+ = \emptyset$ 
7:   for all  $p \in Y$  do
8:     if  $p$  egyszerű és nem  $e_1^n$ -végelem then
9:        $Y^+ = Y^+ \cup \{p\}$ 
10:  // második fázis: redukció
11:  modified = false
12:  for all  $p \in Y^+$  do
13:    deletable = true
14:    for all  $\Delta \subseteq N_n^{*\mathcal{C}^n}(p) \cap Y^+$  do
15:      if  $p$  nem egyszerű a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, Y \setminus \Delta, Y^+ \setminus \Delta)$  képen then
16:        deletable = false
17:      break
18:    if deletable = true then
19:       $Y^+ = Y^+ \setminus \{p\}$ 
20:       $Y = Y \setminus \{p\}$ 
21:      modified = true
22: until modified = false

```

---

Az algoritmus működése a következőképpen foglalható össze. Az első fázisban az egyszerű határelemeket felvesszük az aktív képelemek halmazába. A második fázisban az algoritmus újra meglátogatja az aktív képelemeket, és megvizsgálja, hogy az aktuális  $p$  képelem kielégíti-e a törlési feltételeket. Vegyük észre, hogy nincs meghatározva ezen képelemek meglátogatási sorrendje. Az  $N_n^{\mathcal{C}^n}(p)$ -beli „törölhető” (vagyis az adott iteráció első fázisában egyszerű) fekete képelemeket az  $N_n^*(p) \cap Y^+$  halmaz tartalmazza. Ezen utóbbi halmaz valamennyi részhalmazának vizsgálatával ellenőrizzük az összes olyan lehetséges szituációt, amely akkor léphet fel, ha az algoritmus  $p$  előtt meglátogat néhány  $N_n^{\mathcal{C}^n}(p)$ -beli képelemet. Másképp fogalmazva, megvizsgáljuk, hogy  $p$  egyszerű képelem maradna-e akkor, ha néhány „törölhető”  $n$ -szomszédját fehérre színeznénk. Ha ezen lehetséges szituációk bármelyikénél  $p$  egyszerűsége megszűnne, akkor a  $p$  törlésével esetleg sérülhet a bejárás-függetlenség. Ha azonban  $p$  minden vizsgált esetben egyszerű képelem marad, akkor  $p$  biztonságosan törölhető. Az algoritmus megáll, ha nincs több törölhető képelem.

A végelemeket megtartó ST- $e_1^n$  eljárással szemben az ST- $\mathcal{I}_C^2$ , ST- $\mathcal{I}_S^3$ , és ST- $\mathcal{I}_C^3$  algoritmusok a szűkületi pontok megőrzésén alapulnak, amelyek rendre 2D közép vonal, 3D középfelszín ill. 3D közép vonal előállítására alkalmasak. A három szűkületi pontok összegyűjtésén alapuló eljárást a 6.3.-6.5. algoritmusok adják meg, amelyek csupán az első fázisukban térnek el ST- $e_1^n$ -től: a szűkületi



(a)



(b)

6.2. ábra. Objektumok az  $ST-\mathcal{I}_C^3$  algoritmus elemzéséhez (méretük  $7 \times 7 \times 1$  (a) és  $7 \times 7 \times 2$  (b).)

pontok feljegyzéséhez egy további,  $I$  halmazt használnak, melynek elemei a későbbi iterációk során figyelmen kívül maradnak a határelemek kigyűjtésénél, azaz biztosan vázpontok lesznek a kimeneti képen.

Ezenkívül az  $ST-\mathcal{I}_C^3$  algoritmus az első fázisban egy további vizsgálatot is végez az előző kettőhöz képest, ami részletesebb magyarázatra szorul. Tekintsünk két „lapos” 3D objektumot: egy  $m \times m \times 1$ -es és egy  $m \times m \times 2$ -es vízszintes téglatestet ( $m > 2$ , lásd a 6.2. ábrán az  $m = 7$  eset objektumait). Nyilvánvaló, hogy az első objektumon csak a határvoxel egyszerűek, azonban mivel a többi voxel nem szűkületi pont, az algoritmus minden iterációban törli az aktuális szélső voxelokat, míg egy, a  $\mathcal{C}$  mozaik egy  $2 \times 2 \times 1$ -es régiója által tartalmazott objektum keletkezik a kimeneti képen. Másrészt könnyen látható, hogy a második objektum csak egyszerű voxelokat tartalmaz. Így ha ezen voxelok mindegyikével bővítenénk a  $\mathcal{C}$  halmazt, akkor a második fázisban egyiküket sem lehetne törölni, mivel egy adott  $p \in \mathcal{C}$  voxel izolált voxel lenne a fekete szomszédainak törlése után, vagyis  $p$  nem elégítené ki a második fázis törlési feltételét. Emiatt a második objektum egyetlen voxelét sem lehetne törölni, azaz ilyen esetekben nem juthatunk középvonalhoz. A 6.2.4. definícióból következik, hogy egy az utóbbi objektum által tartalmazott  $p$  objektumvoxelnek van olyan  $q$  egyszerű 1-szomszédja, hogy  $p$  egy  $\mathcal{I}_S^3$  szűkületi ponttá válna  $q$  törlése után. Hogy ezt az anomáliát kiküszöböljük, adott  $p$  egyszerű voxelre az első fázisban egy további olyan  $Q$  halmazt is bevezetünk, amelybe felvesszük a kritikus 1-szomszédokat. Könnyű belátni, hogy  $Q = \emptyset$  esetben  $p$ -nek egy ilyen két-voxel vastag objektum határán kell elhelyezkednie, és  $p$  ekkor törlésre kerül.

Mivel a bemutatott négy algoritmus mindegyike csak egyszerű képelemeket töröl, így definíció szerint topológia-megőrzők. Bejárás-függetlenségük [25]-ben

**6.3. algoritmus.**  $ST\text{-}\mathcal{I}_C^2$ *Input:* a  $(\mathcal{S}, 2, 1, X, \emptyset)$  kép*Output:* a  $(\mathcal{S}, 2, 1, Y, Y^+)$  kép $Y = X$  $I = \emptyset$ **repeat***// első fázis: kontúr-követés* $Y^+ = \emptyset$ **for all**  $p \in Y \setminus I$  **do****if**  $p$  egyszerű pixel az  $Y$  képen **then** $Y^+ = Y^+ \cup \{p\}$ **else if**  $p$  egy  $\mathcal{I}_C^2$  szűkületi pont az  $Y$  halmazon **then** $I = I \cup \{p\}$ *// második fázis: redukció*modified = **false****for all**  $p \in Y^+$  **do**deletable = **true****for all**  $\Delta \subseteq N_2^{\mathcal{S}}(p) \cap Y^+$  **do****if**  $p$  nem egyszerű a  $(\mathcal{S}, 2, 1, Y \setminus \Delta, Y^+ \setminus \Delta)$  képen **then**deletable = **false****break****if** deletable = **true** **then** $Y^+ = Y^+ \setminus \{p\}$  $Y = Y \setminus \{p\}$ modified = **true****until** modified = **false**

ill. [27]-ben ismertetett bizonyítása nem támaszkodik az előbbi alfejezetben bemutatott feltételekre. Az alábbiakban megadok egy olyan, az említettektől eltérő bizonyítást, amely a 6.1.2. tételt alkalmazza.

**6.2.1. tétel.** [25, 27] *Az  $ST\text{-}e_1^n$ ,  $ST\text{-}\mathcal{I}_C^2$ ,  $ST\text{-}\mathcal{I}_S^3$  és  $ST\text{-}\mathcal{I}_C^3$  algoritmusok bejárás-függetlenek.*

*Bizonyítás.* Elegendő megmutatni, hogy az algoritmusokra teljesülnek a 6.1.2. tétel feltételei. Mivel ezen eljárások mindegyike lényegében ugyanazon törlési feltételen alapul, csak az első fázisban térnek el, így a bizonyítás bármelyikre hasonlóan végezhető. A továbbiakban az  $ST\text{-}\alpha$  jelöléssel utalunk a négy algoritmus valamelyikére ( $\alpha \in \{e_1^n, \mathcal{I}_C^2, \mathcal{I}_S^3, \mathcal{I}_C^3\}$ ).

Vezessük be az  $ST = ST\text{-}\alpha$  jelölést, és legyen  $ST^*$  az  $ST$  párhuzamos változata,  $D$  pedig az adott iterációban  $ST^*$  által törölt képelemek halmaza. A bizonyítást indirekten végezzük, azaz tegyük fel, hogy van olyan  $p \in B$  képelem, amelyre a 6.1.2. tétel egyik feltétele sem teljesül.

Először vizsgáljuk a  $p \in D$  esetet. Ekkor csak az 1. feltétel jöhet szóba, és a feltevésünk szerint létezik olyan  $Q \subseteq D$ , melyre  $p$  nem egyszerű a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, B \setminus$

**6.4. algoritmus.**  $ST-\mathcal{I}_S^3$ 


---

*Input:* a  $(\mathcal{C}, 3, 1, X, \emptyset)$  kép  
*Output:* a  $(\mathcal{C}, 3, 1, Y, Y^+)$  kép  
 $Y = X$   
 $I = \emptyset$   
**repeat**  
    *// első fázis: kontúr-követés*  
     $Y^+ = \emptyset$   
    **for all**  $p \in Y \setminus I$  **do**  
        **if**  $p$  egyszerű voxel az  $Y$  halmazon **then**  
             $Y^+ = Y^+ \cup \{p\}$   
        **else if**  $p$  egy  $\mathcal{I}_S^3$  szűkületi pont az  $Y$  halmazon **then**  
             $I = I \cup \{p\}$   
    *// második fázis: redukció*  
    modified = **false**  
    **for all**  $p \in Y^+$  **do**  
        deletable = **true**  
        **for all**  $\Delta \subseteq N_3^{\mathcal{C}}(p) \cap Y^+$  **do**  
            **if**  $p$  nem egyszerű voxel a  $(\mathcal{C}, 3, 1, Y \setminus \Delta, Y^+ \setminus \Delta)$  képen **then**  
                deletable = **false**  
                **break**  
        **if** deletable = **true** **then**  
             $Y^+ = Y^+ \setminus \{p\}$   
             $Y = Y \setminus \{p\}$   
            modified = **true**  
    **until** modified = **false**

---

$Q$ ) képen. Legyen  $\Delta \subseteq N_n^{\mathcal{C}^n}(p) \cap Y^+$  az a legbővebb halmaz, amelyre  $\Delta \subseteq Q$ . A  $p$  képelem egyszerűsége az 1.2.1. megjegyzés szerint csak  $N_n^{\mathcal{C}^n}(p)$  halmaz képelemeitől függ, ezért biztos, hogy  $p$  egyszerű a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, B \setminus (Q \setminus \Delta))$  képen. Ezenkívül az algoritmus törlési feltételét tekintve  $p \in D$ -ből következik, hogy bármely  $\Delta \subseteq N_n^{\mathcal{C}^n}(p) \cap Y^+$  halmazra  $p$  egyszerű a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, B \setminus \Delta)$  képen. Az előbbi összefüggések alapján könnyen belátható, hogy  $p$  egyszerű kell, hogy legyen a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, B \setminus Q)$  képen is, ami ellentmond a feltevésünknek. Ha  $p \neq D$ , akkor csak a 2. feltétel jöhet szóba, és a feltevés szerint van olyan  $Q \subseteq D$ , melyre  $p$  egyszerű a  $(\mathcal{C}^n, n, 1, B \setminus Q)$  képen. E két összefüggésből az előző esethez hasonló gondolatmenettel jutunk ellentmondásra.  $\square$

**6.3. Eredmények**

A bemutatott bejárás-független algoritmusokkal előállított középvonalak két 2D tesztképre a 6.3. és 6.4. ábrákon láthatók, míg két 3D tesztképre a 6.5. és 6.6. ábrák mutatnak be 3D középfelszíneket és középvonalakat. A 6.5(a)

**6.5. algoritmus.**  $\text{ST-}\mathcal{I}_C^3$ *Input:* a  $(\mathcal{C}, 3, 1, X, \emptyset)$  kép*Output:* a  $(\mathcal{C}, 3, 1, Y, Y^+)$  kép $Y = X$  $I = \emptyset$ **repeat***// első fázis: kontúr-követés* $Y^+ = \emptyset$ **for all**  $p \in Y \setminus I$  **do** $Q = \{ q \mid q \in N_1^{*\mathcal{C}}(p) \cap Y, q \text{ egyszerű voxel és } p \text{ egy } \mathcal{I}_S^3 \text{ szűkületi pont az } Y \setminus \{q\} \text{ halmazon} \}$ **if**  $p$  egyszerű voxel az  $Y$  halmazon és  $Q = \emptyset$  **then** $Y^+ = Y^+ \cup \{p\}$ **else if**  $p$  egy  $\mathcal{I}_C^3$  szűkületi pont az  $Y$  halmazon **then** $I = I \cup \{p\}$ *// második fázis: redukció*modified = **false****for all**  $p \in Y^+$  **do**deletable = **true****for all**  $\Delta \subseteq N_3^{*\mathcal{S}}(p) \cap Y^+$  **do****if**  $p$  nem egyszerű voxel a  $(\mathcal{C}, 3, 1, Y \setminus \Delta, Y^+ \setminus \Delta)$  képen **then**deletable = **false****break****if** deletable = **true** **then** $Y^+ = Y^+ \setminus \{p\}$  $Y = Y \setminus \{p\}$ modified = **true****until** modified = **false**

és a 6.6(a) ábrák alatt zárójelben feltüntetett számok a bemeneti kép fekete képelemeinek számát, a többi ábrán pedig a vázszerű jellemzők objektumpontjainak számát jelzik.

A teszteredmények alapján az alábbi megállapításokra jutottunk:

- Az  $\text{ST}(\mathcal{M}^1)$  és  $\text{ST}(\mathcal{M}^2)$  algoritmusok előállított középvonalak kevesebb két-pixel vastag szegmenst tartalmaznak, mint az  $\text{ST-}e_1^2$  és  $\text{ST-}\mathcal{I}_C^2$  eljárásokkal kapott középvonalak.
- Az  $\text{ST}(\mathcal{M}^1)$  algoritmus általában kevesebb vázágot generál, mint az  $\text{ST}(\mathcal{M}^2)$ . Továbbá hasonlóan az  $\text{ST-}\mathcal{I}_C^2$  eljárás az  $\text{ST-}e_1^2$ -hez képest általában kevesebb vázágot, míg az  $\text{ST-}\mathcal{I}_S^3$  eljárás az  $\text{ST-}e_1^2$ -hez képest rendszerint kevesebb vonal- ill. felszín-szegmenst generál.

## 6.4. Összefoglalás és távlati célok

Ebben a fejezetben a bejárás-független szekvenciális vékonyítással kapcsolatos, kutatásaim eredményeit foglalta össze, amelyek a dolgozatom 3. tézispontjához tartoznak.

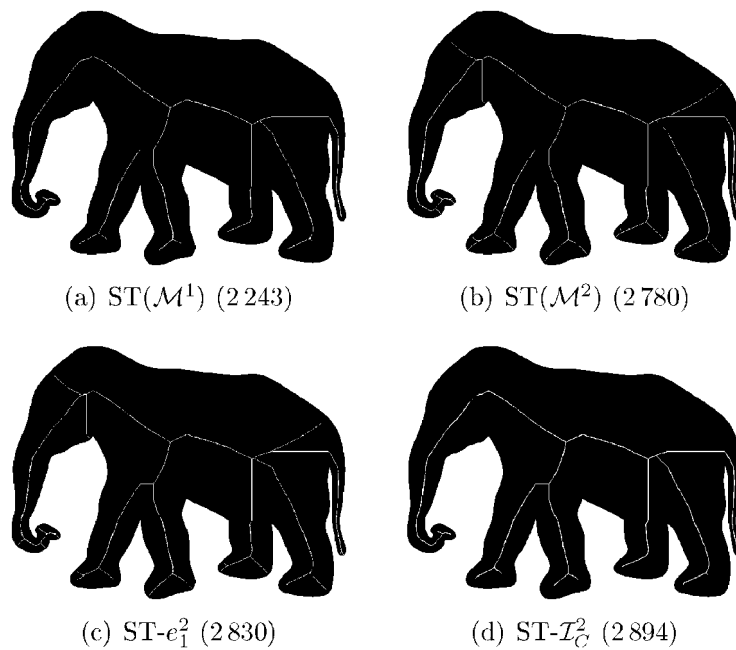
A 6.1. alfejezetben megadtam néhány szükséges és elegendő feltételt, amelyek segítségével megállapítható a szekvenciális algoritmusok bejárás-függetlensége. Ezek között egyrészt olyan speciális algoritmusokra vonatkozó kritériumokat javasoltam, amelyek a képelemek törölhetőségét törlőmaszkokkal adják meg. Másrészt bizonyítottam olyan feltételeket is, amelyek általánosan alkalmazhatóak tetszőleges szekvenciális vékonyító eljárásra; ezek a szekvenciális algoritmusok párhuzamos változataival történő összehasonlításon alapulnak.

A 6.2. alfejezetben ismertettem néhány konkrét bejárás-független algoritmust főként  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  és  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képekre. Közülük kettő törlőmaszkokkal adott (mindegyikük  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képeket vékonyít), négy pedig az előzőeknél bonyolultabb szabályt alkalmaz a képelemek törölhetőségére, melyek közül az egyik tetszőleges  $n$ -dimenziós  $(\mathcal{C}^n, n, 1)$  képre, a másik csak  $(\mathcal{S}, 2, 1)$  képekre, a többi pedig  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  képekre alkalmazható. A négy utóbbi algoritmus törlési szabálya hasonló elven alapul: a  $p$  határelem akkor és csak akkor törölhető, ha egyrészt megfelel bizonyos geometriai kényszerfeltételnek, másrészt egyszerű marad minden olyan esetben, amikor a  $p$  ugyanezen kényszerfeltételnek eleget tevő egyszerű 2- ill. 3-szomszédai közül törölnének néhányat. Ezen algoritmusok főként az általuk alkalmazott geometriai kényszerfeltételekben különböznek.

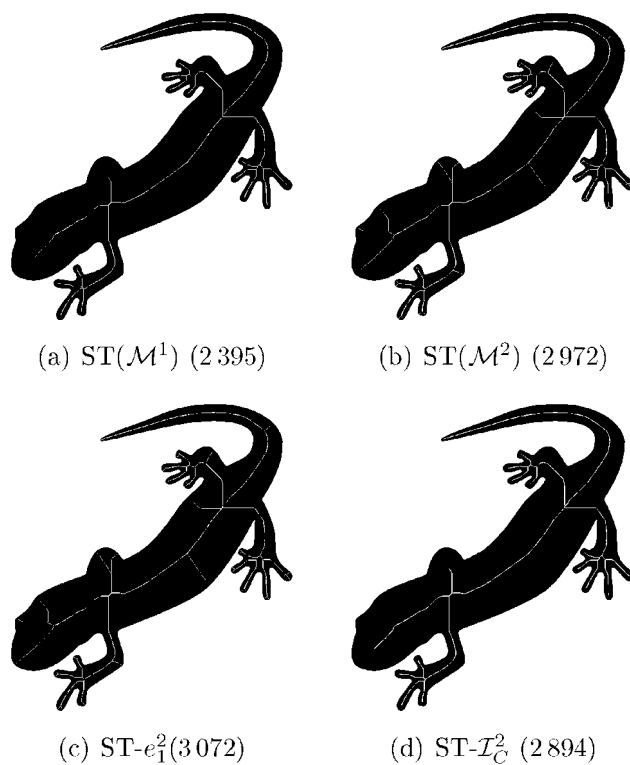
Eredményeink két folyóiratcikkben [20, 22] és négy nemzetközi konferencia kiadványában [21, 25, 27, 29] jelentek meg.

További célunk a bejárás-függetlenséghez hasonló problémák vizsgálata és megoldása párhuzamos irány- és almező-alapú algoritmusokra. Ezen vékonyító stratégiákkal kapott vázközelítések rendszerint függenek az aliterációk sorrendjének megválasztásától. Kérdéses tehát, hogy milyen módon adhatóak meg olyan irány- és almező-alapú eljárások, amelyek az aliterációkra nézve „sorrend-függetlenek”.

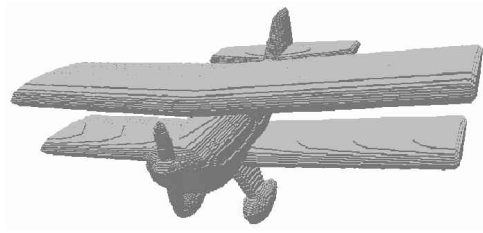
Foglalkozni kívánunk azzal az érdekes problémával is, hogy hogyan kell átalakítanunk egy szekvenciális algoritmus törlési feltételét úgy, hogy az eredetivel ekvivalens párhuzamos változathoz jussunk.



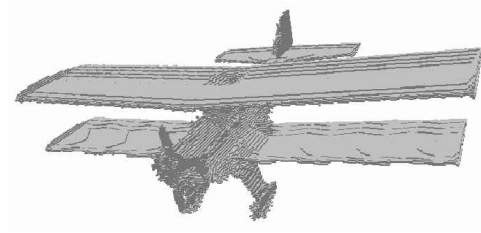
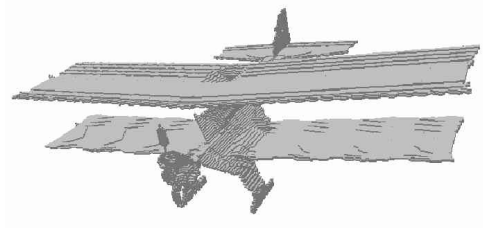
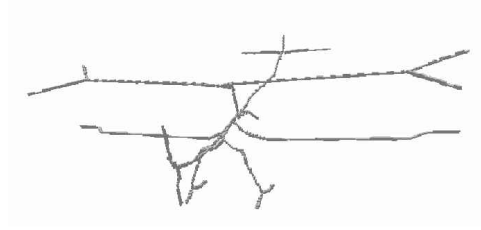
6.3. ábra. Egy  $612 \times 467$  méretű, 179 293 objektumpontot tartalmazó tesztkép, amelyre rávetítettük a négy javasolt 2D bejárásfüggetlen algoritmus eredményét.



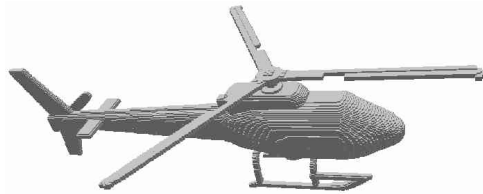
6.4. ábra. Egy  $552 \times 607$  méretű, 108 615 objektumpontot tartalmazó tesztkép, amelyre rávetítettük a négy javasolt 2D bejárásfüggetlen algoritmus eredményeit.



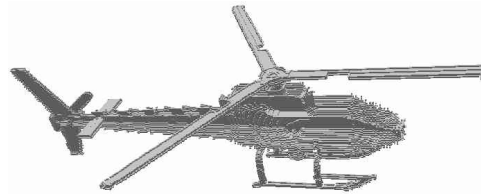
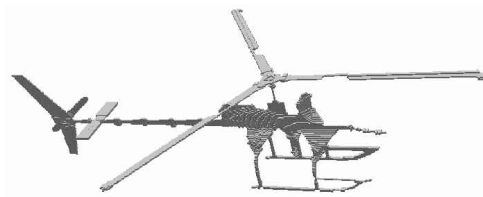
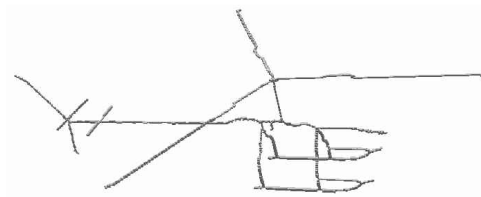
(a) eredeti kép (656 424)

(b)  $ST-e_1^3$  (74 565)(c)  $ST-I_S^3$  (74 122)(d)  $ST-I_C^3$  (2 320)

6.5. ábra. Egy  $217 \times 304 \times 98$  méretű kép (a), az  $ST-e_1^3$  (b) és  $ST-I_S^3$  (c) algoritmusok által generált középfelzínnek, és az  $ST-I_C^3$  algoritmus (d) által előállított középvonal.



(a) eredeti kép (273 743)

(b)  $ST-e_1^3$  (28 211)(c)  $ST-I_S^3$  (12 512)(d)  $ST-I_C^3$  (2 810)

6.6. ábra. Egy  $102 \times 381 \times 255$  méretű teszt kép (a), az  $ST-e_1^3$  (b) és  $ST-I_S^3$  (c) algoritmusok által generált középfelzínnek, és az  $ST-I_C^3$  algoritmus (d) által előállított középvonal.



# Összegzés

A digitális topológia központi problémája annak eldöntése, hogy a bináris képműveletek megőrzik-e a topológiát. Korábban főként az ortogonális képrácsokkal duális mozaikokon mintavételezett képek redukcióinak topológia-megőrzésére javasoltak elegendő feltételeket. Ezek legfontosabb alkalmazási területe a vékonyító algoritmusok topológiai korrektségének igazolása, amelyekkel bináris objektumok vázszerű jellemzőit nyerjük ki. Dolgozatomban a digitális topológia és a vékonyítás néhány fontos és megoldatlan kérdésével kapcsolatos kutatásom eredményét foglaltam össze.

A dolgozat első tézispontjában megadtam a háromszög-, a négyzet-, és a hatszög-mozaikon a topológia-megőrzés szempontjából kulcsfontosságú egyszerű pixeleknél kétféle jellemzését. Valamennyi tárgyalt 2D mozaiktípus esetén megállapítható, hogy egy pixel egyszerűsége lokálisan ellenőrizhető.

Ezenkívül ismerettem a három- és a hatszög-mozaikokon értelmezett redukciók topológia-megőrzésének néhány (szimmetrikus és aszimmetrikus) elegendő feltételét is. A mozaikok közötti analógiákra alapozva olyan általános alakban is megadtam a tárgyalt elegendő feltételeket, amelyek mindhárom szabályos mozaikra érvényesek.

Ezenkívül beláttam egy, az addíciók és a redukciók között fennálló dualitási tételt. Ennek segítségével könnyen megkonstruálhatók valamennyi 2D és 3D szabályos mozaikon értelmezett addíciók topológiai korrektségének elegendő feltételei. Így e tétel alapján általános elegendő feltételeket adtam a topológia-megőrző addíciókra is.

Kidolgoztam továbbá olyan hexagonális és trianguláris algoritmusokat, amelyek törlési feltételei az egyedi pixelek törölhetőségére vonatkozó feltételekből származtatottak, így a topológia-megőrzésük garantált. Ezekben a három hagyományos vékonyító stratégiát (teljesen párhuzamos, irány-alapú és almező-alapú) kombináltam bizonyos geometria kényszerfeltételekkel. Az irány- és almező-alapú algoritmusok szimmetrikus és aszimmetrikus változatai – a törlési feltételek hasonlósága miatt – csak a zsugorító eljárásokra mutatnak eltérést. Ekkor azonban csak az aszimmetrikus változatok garantálják azt, hogy az objektumokat egy-egy izolált pixellé zsugorítsák, vagyis valóban a topológiai magot kapjuk.

A második tézispontban bemutattam egy 3D kontúrsimító algoritmust  $(C, 3, 1)$  képekre. A bizonyítottan topológia-megőrző simító eljárás, mely a törölhető pontokat  $3 \times 3 \times 3$ -as maszkokkal vizsgálja, számos 1- és 2 pont-

ből álló kontúrzejt képes eltávolítani. Simító algoritmusunkat a hagyományos vékonyító eljárásokkal kombináltuk abból a célból, hogy csökkentsük a vékonyító algoritmusok által produkált nemkívánatos szegmensek számát. A javasolt séma iterációs lépései egy simító és egy vékonyító fázisból állnak. Eképpen implementáltuk számos konvencionális vékonyító algoritmusnak a javasolt kontúr-simító eljárással kombinált változatát, és számos képen teszteltük az új vékonyító séma hatékonyságát. Az eredmények egyértelműen alátámasztják azt, hogy a javasolt módszerrel jelentősen kevesebb nemkívánatos felszín- ill. vonal-szegmenst tartalmazó vázszerű jellemzőkhöz jutunk.

A dolgozat harmadik tézispontjában a szekvenciális vékonyító algoritmusok bejárás-függetlenségének problémáját tárgyaltam. A téma vizsgálatát az indokolja, hogy a szekvenciális eljárások általában érzékenyek a határpontok bejárasi sorrendjére, és bár korábban már javasoltak bejárás-független algoritmusokat, azok vagy jelentősen eltérnek a hagyományos szekvenciális vékonyító sémától, és csak a vonalvégpontok előzetes kijelölésével alkalmasak középvonalak meghatározására, és még a topológiai magot sem garantálják.

A tézisponthoz tartozó első eredményként megadtam olyan szükséges és elegendő feltételeket, amelyekkel ellenőrizhető a szekvenciális algoritmusok bejárás-függetlensége. Mivel számos vékonyító algoritmus törlési feltételei törlőmaszkokkal adottak, ezért az elegendőségre az említett kritériumoknak olyan változatát is kidolgoztam, amelyek kimondottan ezekre az algoritmusokra érvényesek.

A harmadik tézispont további eredményeként hat szekvenciális algoritmust ismertettem, amelyek bejárás-függetlenségét a tézispont első részében megadott kritériumok segítségével bizonyítottam. Az első kettő algoritmus törlőmaszkokkal, a további négy pedig speciális törlési szabályokkal dolgozik. Ezen utóbbi algoritmusok a következő stratégiát követik: az adott geometriai kényszerfeltételnek eleget tevő  $p$  határpontot pontosan akkor minősítjük törölhetőnek, ha az egyszerű maradna minden olyan szituációban, amikor a  $p$  ugyanezen kényszerfeltételnek eleget tevő egyszerű 2- ill. 3-szomszédai közül törölnénk néhányat. A négy algoritmus közül az egyik egy beépített végpont-feltétellel, három pedig szűkületi pontok meghatározásával képes a topológiai magtól különböző vázszerű jellemzők előállítására. Az első szűkületi pontokat gyűjtő algoritmussal megoldottuk a bejárás-függetlenség problémáját tetszőleges dimenzióra, azonban a 3D változata csak középfelszín tud generálni. A szűkületi pontok megtartásán alapuló további három eljárás rendre 2D középvonal, 3D középfelszín ill. 3D középvonal kinyerésére alkalmas.

# Summary

Digital topology deals with the topological properties of binary digital pictures. Its widely investigated issue is topology preservation. Earlier studies in this topic mainly concerned with sufficient conditions for topology preserving reductions on orthogonal grids. They are applied for ensuring topological correctness of thinning algorithms which produce skeleton-like shape features of binary objects. In my thesis I summarized the results of my research in some relevant and unsolved issues of digital topology and thinning.

The first key point of my thesis deals mainly with the topological characterization of pictures sampled on hexagonal and triangular grids. For these grids, first I gave two possible characterizations of so-called simple points, which play a key role in topology preservation. Then I proposed some (symmetric and asymmetric) sufficient conditions for topology preservation. Asymmetric conditions make also possible the deletion of some points in non simple sets, and they require less investigation to determine the topology. The conditions were also given in a generic form so that they hold for all the three regular 2D grids. I also discussed the sufficiency of topology preservation for additions. As a first step, I introduced a duality relationship between reductions and additions. Then, using this relationship, I deduced some general sufficient conditions on additions from the mentioned conditions on reductions.

Furthermore, I gave some hexagonal and triangular parallel thinning algorithms, which combine the three parallel thinning strategies (i.e., fully parallel, directional and subfield-based) with some geometric constraints. Some of these can produce topological kernels, and the remaining ones generate their centerline, and among them there are both asymmetric and symmetric versions. The topological correctness of the proposed algorithms are guaranteed by the new conditions for topology preservation.

The central issue of the second key point of my thesis is to reduce the number of the unwanted skeletal segments produced by 3D thinning algorithms. The drawback of the conventional pruning process, which is a possible preprocessing step of skeletonization, is that it preserves the distortions caused by the unwanted skeletal segments. Hence we considered an another approach which is based on the smoothing of object contour. However, earlier there have not been proposed any algorithm capable of smoothing binary pictures that can be also combined with 3D thinning algorithms.

In this key point of the thesis I introduced a contour smoothing algo-

rithm which can remove numerous salient voxels from the contour of objects in  $(\mathcal{C}, 3, 1)$  pictures. The algorithm is composed of two reductions whose topological correctness is proven. Deletable points of these operators are given by  $3 \times 3 \times 3$  matching templates.

We combined our contour smoothing algorithm with the existing thinning algorithms in a way that in an iteration step, a thinning phase is followed by a smoothing phase. I also showed an efficient implementation which can be applied for the algorithms based on the new scheme. We compared for several test images the results of some thinning algorithms with their new versions that is combined with smoothing.

The topic of the third key point is the order independency of sequential thinning algorithms. The reason for detailed discussion of this topic can be explained by the fact that sequential thinning algorithms are sensitive to the visiting order of border points. Although some order-independent algorithms had been already proposed, they either significantly differ from the conventional sequential thinning scheme, or they in themselves are shrinking algorithms.

As the first result in this key point, I gave some general necessary and sufficient conditions for order independency. As many of the thinning algorithms are template-based, I also showed some sufficient conditions for such algorithms.

Furthermore, I also introduced six order-independent sequential thinning algorithms. The first two of them is template-based, the other four apply special deleting conditions. Those algorithms are based on the following strategy. We examine whether a simple point  $p$  satisfying a geometric constraint would be still simple if we would change some of its „deletable” black neighbors to white points. If this holds for every possible situations then  $p$  is considered as deletable. Among the latter four algorithms, one defines the geometric constraint with an endpoint characterization, and the other three use isthmus preservation for that purpose. The endpoint-based variants can be applied for pictures of arbitrary dimensions, however, its 3D version only can produce medial surfaces. The three isthmus-based algorithms are capable of producing 2D centerlines, 3D medial surfaces, and 3D centerlines.

# Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Palágyi Kálmánnak, amiért értékes útmutatásaival, áldozatos munkájával és végtelen türelmével egyengette utamat doktoranduszi éveim alatt, és amiért szakmailag és emberileg is példát mutatott.

Kollégámnak és barátomnak, Dr. Németh Gábornak is szeretném megköszönni azt, hogy mindig bizalommal fordulhattam hozzá tanácsért és segítségért.

Végül rendkívül hálás vagyok szüleimnek és bátyámnak, hogy tanulmányaim során töretlenül támogattak, és szeretetükkel lelket öntöttek belém a nehezebb, küzdelmesebb időszakokban is.



# A szerző közleményei

## Az Informatika Doktori Iskola által elfogadott publikációk

A dolgozatban felhasznált és a Doktori Iskola által publikációnak elfogadott 13 közlemény összpontszáma **9,40**, a szerző publikációinak összpontszáma **12,40**.

Az alábbi felsorolásban vastag betűkkel szedtem ki azokat a publikációkat, amelyek a dolgozat eredményeinek alapjául szolgálnak.

### Könyvfejezet:

1. K. Palágyi, G. Németh, and **P. Kardos**: Topology Preserving Parallel 3D Thinning Algorithms. In R. Barneva and V. Brinkov, editors, *Digital Geometry Algorithms. Theoretical Foundations and Applications to Computational Imaging*, Springer, pp. 165–188, 2012.

### Folyóirat cikkek:

1. **P. Kardos**: Sufficient conditions for Order-Independency in Sequential Thinning. *Acta Cybernetica* 20, pp. 87–100, 2010.
2. **P. Kardos**, K. Palágyi: Topology-preserving hexagonal thinning, *International Journal of Computer Mathematics*<sup>1</sup>, to appear
3. **Kardos P.**, Németh G., Palágyi K.: Bejárásfüggetlen szekvenciális vékonyítás, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 27, pp. 17–40, 2010.
4. G. Németh, **P. Kardos**, K. Palágyi: Thinning Combined with Iteration-by-Iteration Smoothing for 3D Binary Images, *Graphical Models*<sup>2</sup> 73, pp. 335–345, Elsevier, 2011.

---

<sup>1</sup>Hatástényező: 0.499 (2011)

<sup>2</sup>Hatástényező: 1.00 (2011)

### Konferencia-kiadványokban megjelent közlemények:

1. P. Kardos, K. Palágyi: Sufficient Conditions for Topology Preserving Additions and General Operators, in *Proceedings of 14th IASTED International Conference on Computer Graphics and Imaging, CGIM 2013*, Innsbruck, Austria, pp. 107–114, IASTED, 2013.
2. P. Kardos, K. Palágyi: Isthmus-Based Order-Independent Sequential Thinning, in *Proc. 9th IASTED International Conference on Signal Processing, Pattern Recognition and Applications, SPPRA 2012*, pp. 28–34, IASTED, 2012.
3. P. Kardos, K. Palágyi: On Order-Independent Sequential Thinning, in *Proc. 3rd IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications, CogInfoCom 2012*, pp. 149–154, IEEE, 2012.
4. P. Kardos, K. Palágyi: Hexagonal parallel thinning algorithms based on sufficient conditions for topology preservation, in *Proc. International Symposium of Computational Modeling of Objects Presented in Images: Fundamentals, Methods, and Applications, CompIMAGE 2012*, pp. 63–68, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
5. P. Kardos, K. Palágyi: On Topology Preservation for Triangular Thinning Algorithms, in *Proc. 15th International Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIA 2012*, Lecture Notes in Computer Science 7655, Springer, 2012.
6. P. Kardos, K. Palágyi: Order-independent sequential thinning in arbitrary dimensions, in *Proc. IASTED International Conference on Signal and Image Processing and Applications, SI-PA 2011*, pp. 129–134, IASTED, 2011.
7. P. Kardos, K. Palágyi: On topology preservation for hexagonal parallel thinning algorithms, in *Proc. 14th International Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIA'2011*, Lecture Notes in Computer Science 6636, pp. 31–42, Springer, 2011.
8. G. Németh, P. Kardos, K. Palágyi: A family of topology-preserving 3D parallel 6-subiteration thinning algorithms. In *Proc. 14th International Workshop on Combinatorial Image Analysis IWCIA'2011*, Lecture Notes in Computer Science, 6636, pp. 17–30, Springer, 2011.
9. G. Németh, P. Kardos and K. Palágyi: Topology Preserving 3D Thinning Algorithms Using Four and Eight Subfields. In *proc. of 7th Int.*



Conf. on Image Analysis and Recognition, ICIAR 2010, Lecture Notes in Computer Science 6111, part 1, Springer, pp. 316–325, 2010.

10. **G. Németh, P. Kardos, K. Palágyi:** Topology Preserving Parallel Smoothing for 3D Binary Images, in *Proceedings of the International Symposium of Computational Modeling of Objects Presented in Images: Fundamentals, Methods, and Applications, CompIMAGE'10*, Lecture Notes in Computer Science 6026, pp. 287–298, Springer, 2010.
11. G. Németh, P. Kardos, and K. Palágyi: Topology Preserving 2-Subfield 3D Thinning Algorithms. In proc. of 7th IASTED Conference on Signal Processing, Pattern Recognition and Application, SPPRA 2010, pp. 310–316, IASTED, 2010.
12. **P. Kardos, G. Németh, K. Palágyi:** An Order-Independent Sequential Thinning Algorithm, in *Proc. 13th International Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIA 2009*, Lecture Notes in Computer Science 5852, pp. 162–175, Springer, 2009.

## Egyéb közlemények

1. P. Kardos, K. Palágyi: Topology preserving parallel thinning on hexagonal grids. *Képfeldolgozók és Alakfelismerők Társaságának (KÉPAF) 9. Konferenciájának elektronikus kiadványa*, pp. 250–264, 2013.
2. Kardos P., Németh G. és Palágyi K.: Iterációnkénti simítással kombinált vékonyítás 3D bináris képeken. *Képfeldolgozók és Alakfelismerők Társaságának (KÉPAF) 8. Konferenciájának elektronikus kiadványa*, 2011.  
[http://www.inf.u-szeged.hu/kepaf2011/pdfs/S05\\_01.pdf](http://www.inf.u-szeged.hu/kepaf2011/pdfs/S05_01.pdf)
3. Németh G., Kardos P. és Palágyi K.: A topológia-megőrzés elegendő feltételein alapuló 3D párhuzamos vékonyító algoritmusok. *Képfeldolgozók és Alakfelismerők Társaságának (KÉPAF) 8. Konferenciájának elektronikus kiadványa*, 2011.  
[http://www.inf.u-szeged.hu/kepaf2011/pdfs/S05\\_02.pdf](http://www.inf.u-szeged.hu/kepaf2011/pdfs/S05_02.pdf)
4. Kardos P., Németh G. és Palágyi K.: Kritikus párokat vizsgáló bejárás-független szekvenciális vékonyító algoritmus. *Képfeldolgozók és Alakfelismerők Társaságának (KÉPAF) 7. Konferenciájának elektronikus kiadványa*, 2009.  
[http://vision.sztaki.hu/~kepaf/kepaf2009\\_CD/files/119-5-KardosNemethPalagyi\\_bejarasfuggetlenvekonyitas.pdf](http://vision.sztaki.hu/~kepaf/kepaf2009_CD/files/119-5-KardosNemethPalagyi_bejarasfuggetlenvekonyitas.pdf)



# Irodalomjegyzék

- [1] G. Bertrand. A parallel thinning algorithm for medial surfaces. *Pattern Recognition Letters*, 16:979–986, 1995.
- [2] G. Bertrand. Sufficient conditions for 3D parallel thinning algorithms. *Vision Geometry IV*, 2573(1):52–60, 1995.
- [3] G. Bertrand and Z. Aktouf. A three-dimensional thinning algorithm using subfields. In Robert A. Melter and Angela Y. Wu, editors, *SPIE Conf. on Vision Geometry III*, pages 113–124, 1995.
- [4] G. Bertrand and M. Couprie. Transformations topologiques discrètes. In David Coeurjolly, Annick Montanvert, and Jean-Marc Chassery, editors, *Géométrie discrète et images numériques*, pages 187–209, Hermès, 2007.
- [5] G. Bertrand and G. Malandain. A new characterization of three-dimensional simple points. *Pattern Recognition Letters*, 15:169–175, 1994.
- [6] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In Weiant Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, MIT Press, 1967.
- [7] L. Calabi. *A Study of the Skeleton of Plane Figures*, Scientific Report Parke Mathematical Laboratories. Scientific Report Parke Mathematical Laboratories. Parke Mathematical Laboratories, 1965.
- [8] Y.-S. Chen and W.-H. Hsu. Systematic approach for designing 2-subcycle and pseudo 1-subcycle parallel thinning algorithms. *Pattern Recognition*, 22(3):267–282, 1989.
- [9] M. Couprie and G. Bertrand. Topology preserving alternating sequential filter for smoothing two-dimensional and three-dimensional objects. *J. Electronic Imaging*, 13(4):720–730, 2004.
- [10] E. S. Deutsch. Thinning algorithms on rectangular, hexagonal, and triangular arrays. *Communications of the ACM*, 15(9):827–837, 1972.
- [11] M. Gökmen and R.W. Hall. Parallel shrinking algorithms using 2-subfields approaches. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 52(2):191–209, 1990.

- [12] W. Gong and G. Bertrand. A simple parallel 3D thinning algorithm. *1990 Proceedings 10th International Conference on Pattern Recognition*, pages 188–190, 1990.
- [13] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital Image Processing (3rd Edition)*. Prentice-Hall, Inc., 2006.
- [14] Z. Guo and R. W. Hall. Parallel thinning with two-subiteration algorithms. *Communications of the ACM*, 32:359–373, 1989.
- [15] Z. Guo and R. W. Hall. Fast fully parallel thinning algorithms. *CVGIP: Image Understanding*, 55:317–328, 1992.
- [16] R. W. Hall. *Parallel Connectivity-Preserving Thinning Algorithms*, pages 145–179. Elsevier Science Inc., 1996.
- [17] R. W. Hall, T. Y. Kong, and A. Rosenfeld. *Shrinking Binary Images*, pages 31–98. Elsevier Science Inc., 1996.
- [18] J. Hu, D. Yu, and H. Yan. A multiple point boundary smoothing algorithm. *Pattern Recognition Letters*, 19(8):657–668, 1998.
- [19] M. Iwanowski and P. Soille. Fast algorithm for order independent binary homotopic thinning. In *Proceedings of the 8th International Conference on Adaptive and Natural Computing Algorithms, Part II, ICANNGA '07, ICANNGA '07*, pages 606–615, Springer-Verlag, 2007.
- [20] P. Kardos. Sufficient conditions for order-independency in sequential thinning. *Acta Cybernetica*, 20:87–100, 2011.
- [21] P. Kardos, G. Németh, and K. Palágyi. An order-independent sequential thinning algorithm. In *Proceedings of the 13th International Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIA '09, IWCIA '09*, pages 162–175, Springer-Verlag, 2009.
- [22] P. Kardos, G. Németh, and K. Palágyi. 2D parallel thinning and shrinking based on sufficient conditions for topology preservation. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 27:17–40, 2010.
- [23] P. Kardos and K. Palágyi. Topology-preserving hexagonal thinning. *International Journal of Computer Mathematics*, in press.
- [24] P. Kardos and K. Palágyi. On topology preservation for hexagonal parallel thinning algorithms. In *IWCIA 2011*, pages 31–42, 2011.
- [25] P. Kardos and K. Palágyi. Order-independent sequential thinning in arbitrary dimensions. In *Proceedings of the IASTED International Conference Signal and Image Processing and Applications*, pages 129–134, IASTED, 2011.

- [26] P. Kardos and K. Palágyi. Hexagonal parallel thinning algorithms based on sufficient conditions for topology preservation. In *Proceedings of International Symposium on Computational Modeling of Objects Represented in Images*, pages 63–68, 2012.
- [27] P. Kardos and K. Palágyi. Isthmus-based order-independent sequential thinning. In *Proceedings of the IASTED International Conference on Signal Processing, Pattern Recognition and Application*, IASTED, 2012.
- [28] P. Kardos and K. Palágyi. On topology preservation for triangular thinning algorithms. In *Proceedings of the International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, pages 128–142, 2012.
- [29] P. Kardos and K. Palágyi. On order-independent sequential thinning. In *Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom) 2012*, pages 149–154, IEEE, 2013.
- [30] P. Kardos and K. Palágyi. Sufficient conditions for topology preserving additions and general operators. In *Proceedings of the IASTED International Conference Computer Graphics and Imaging*, pages 107–114, IASTED, 2013.
- [31] T. Y. Kong. On topology preservation in 2-d and 3-d thinning. *IJPRAI*, 9(5):813–844, 1995.
- [32] T. Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital topology: introduction and survey. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 48:357–393, 1989.
- [33] T.-C. Lee, R.L. Kashyap, and C.-N. Chu. Building skeleton models via 3-D medial surface/axis thinning algorithms. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Graphical Models Image Processing*, 56:462–478, 1994.
- [34] C. Lohou and G. Bertrand. A new 3D 12-subiteration thinning algorithm based on P-simple points. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 46:33 – 52, 2001. IWCIA 2001, 8th International Workshop on Combinatorial Image Analysis.
- [35] C. Lohou and G. Bertrand. A new 3D 6-subiteration thinning algorithm based on P-simple points. In *Proceedings of the 10th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, DGCI '02, DGCI '02, pages 102–113, Springer-Verlag, 2002.
- [36] C. Lohou and G. Bertrand. A 3D 12-subiteration thinning algorithm based on P-simple points. *Discrete Applied Mathematics*, 139:171–195, 2004.

- [37] C. Lohou and G. Bertrand. A 3D 6-subiteration curve thinning algorithm based on P-simple points. *Discrete Applied Mathematics*, 151:198–228, 2005.
- [38] C. Lohou and J. Dehos. Automatic correction of ma and sonka’s thinning algorithm using P-simple points. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 32:1148–1152, 2010.
- [39] H. E. Lü and P. S. P. Wang. A comment on a fast parallel algorithm for thinning digital patterns. *Communications of the ACM*, 29:239–242, 1986.
- [40] C. M. Ma. On topology preservation in 3D thinning. *CVGIP: Image Understanding*, 59(3):328 – 339, 1994.
- [41] C. M. Ma. A 3D fully parallel thinning algorithm for generating medial faces. *Pattern Recognition Letters*, 16:83–87, 1995.
- [42] C. M. Ma and M. Sonka. A fully parallel 3D thinning algorithm and its applications. *Computer Vision and Image Understanding*, 64:420–433, 1996.
- [43] C.-M. Ma and S.-Y. Wan. A medial-surface oriented 3-d two-subfield thinning algorithm. *Pattern Recognition Letters*, 22(13):1439–1446, 2001.
- [44] C.-M. Ma, S.-Y. Wan, and H.-K. Chang. Extracting medial curves on 3D images. *Pattern Recognition Letters*, 23(8):895–904, 2002.
- [45] C.-M. Ma, S.-Y. Wan, and J.-D. Lee. Three-dimensional topology preserving reduction on the 4-subfields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 24(12):1594–1605, 2002.
- [46] A. Manzanera and T. M. Bernard. MB: a coherent collection of 2D parallel thinning algorithms. Technical Report LEI/AVA-02-002, ENSTA/LEI, 2002.
- [47] A. Manzanera and T. M. Bernard. Metrical properties of a collection of 2D parallel thinning algorithms. In *International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA’03)*, Electronic Notes on Discrete Mathematics, volume 12, Elsevier Science, 2003.
- [48] A. Manzanera, T. M. Bernard, F. Preteux, and B. Longuet. A unified mathematical framework for a compact and fully parallel n-D skeletonization procedure. In *Vision Geometry VIII (VG’99)*, pages 57–68, SPIE, 1999.
- [49] A. Manzanera, M. B. Thierry, J. P. Françoise, and L. Bernard. Medial faces from a concise 3D thinning algorithm. In *ICCV’99*, pages 337–343, 1999.

- [50] S. Marchand-Maillet and Y. M. Sharaiha. *Binary digital image processing - a discrete approach*. Academic Press, 2000.
- [51] J. Mukherjee, P.P. Das, and B.N. Chatterji. On connectivity issues of ESPTA. *Pattern Recognition Letters*, 11:643–648, 1990.
- [52] C. Neusius, J. Olszewski, and D. Scheerer. An efficient distributed thinning algorithm. *Parallel Computing*, 18(1):47–55, 1992.
- [53] G. Németh. *Topológia-megőrző vékonyító algoritmusok tervezése és vázki-jelölő algoritmusok kvantitatív összehasonlítása. Doktori Értekezés*. Szegedi Tudományegyetem, 2012.
- [54] G. Németh, P. Kardos, and K. Palágyi. Topology preserving parallel smoothing for 3D binary images. In *CompIMAGE*, pages 287–298, 2010.
- [55] G. Németh, P. Kardos, and K. Palágyi. 2D parallel thinning and shrinking based on sufficient conditions for topology preservation. *Acta Cybernetica*, 20:125–144, 2011.
- [56] G. Németh, P. Kardos, and K. Palágyi. Thinning combined with iteration-by-iteration smoothing for 3D binary images. *Graphical Models*, 73(6):335–345, 2011.
- [57] G. Németh, P. Kardos, and P. Palágyi. Topology preserving 2-subfield 3D thinning algorithms. In *Proceedings of the IASTED International Conference on Signal Processing, Pattern Recognition and Applications*, pages 310–316, IASTED, 2010.
- [58] G. Németh, P. Kardos, and P. Palágyi. Topology preserving 3D thinning algorithms using four and eight subfields. In *Proceedings of International Conference on Image Analysis and Recognition*, Lecture Notes in Computer Science, volume 6111, pages 316–325, Springer Verlag, 2010.
- [59] G. Németh and K. Palágyi. Parallel thinning algorithms based on ronse’s sufficient conditions for topology preservation. *Progress in Combinatorial Image Analysis*, pages 183–194, 2009.
- [60] G. Németh and K. Palágyi. 2D parallel thinning algorithms based on isthmus-preservation. In S. Loncaric, G. Ramponi, and D. Sersic, editors, *Proceedings of the International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, pages 585–590, IEEE, 2011.
- [61] G. Németh and K. Palágyi. Topology preserving parallel thinning algorithms. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 21:37–44, 2011.

- [62] K. Palágyi. A 3D 3-subiteration thinning algorithm for medial surfaces. In *Proceedings of the International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 2000)*, Lecture Notes in Computer Science, volume 1953, pages 406–417, Springer, 2000.
- [63] K. Palágyi. A 3-subiteration surface-thinning algorithm. In *Proceedings of the 12th international conference on Computer analysis of images and patterns*, CAIP'07, CAIP'07, pages 628–635, Springer-Verlag, 2007.
- [64] K. Palágyi. A 3D fully parallel surface-thinning algorithm. *Theoretical Computer Science*, 406:119–135, 2008.
- [65] K. Palágyi. A 3-subiteration 3D thinning algorithm for extracting medial surfaces. *Pattern Recognition Letters*, 23:663–675, 2002.
- [66] K. Palágyi and A. Kuba. A 3D 6-subiteration thinning algorithm for extracting medial lines. *Pattern Recognition Letters*, 19:613–627, 1998.
- [67] K. Palágyi and A. Kuba. Directional 3D thinning using 8 subiterations. In *Proceedings of the International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 1999)*, Lecture Notes in Computer Science, volume 1568, pages 325–336, Springer, 1999.
- [68] K. Palágyi and A. Kuba. A parallel 3D 12-subiteration thinning algorithm. *Graphical Models and Image Processing*, 61:199–221, 1999.
- [69] K. Palágyi and G. Németh. Fully parallel 3D thinning algorithms based on sufficient conditions for topology preservation. In *Proceedings of the International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Lecture Notes in Computer Science, volume 5810, pages 481–492, Springer Verlag, 2009.
- [70] K. Palágyi, G. Németh, and P. Kardos. *Topology preserving parallel 3D thinning algorithms.*, pages 165–188. Springer, 2012.
- [71] K. Preston Jr. and M. J. B. Duff. *Modern cellular automata: Theory and applications*, Advanced applications in pattern recognition. Advanced applications in pattern recognition. Plenum Press, 1984. 340 pages.
- [72] V. Ranwez and P. Soille. Order independent homotopic thinning for binary and grey tone anchored skeletons. *Pattern Recognition Letters*, 23:687–702, 2002.
- [73] C. Ronse. Minimal test patterns for connectivity preservation in parallel thinning algorithms for binary digital images. *Discrete Applied Mathematics*, 21(1):67 – 79, 1988.
- [74] A. Rosenfeld. A characterization of parallel thinning algorithms. *Information and Control*, 29(3):286–291, 1975.



- [75] D. Rutovitz. Pattern recognition. *Journal of the Royal Statistical Society*, 129:504–530, 1966.
- [76] D. Shaked and A.M. Bruckstein. Pruning medial axes. *Computer Vision and Image Understanding*, 69(2):156–169, 1998.
- [77] K. Siddiqi and S. Pizer. *Medial Representations: Mathematics, Algorithms and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008.
- [78] R.C. Staunton. A one pass parallel hexagonal thinning algorithm. In *Image Processing and Its Applications, 1999. Seventh International Conference on (Conf. Publ. No. 465)*, pages 841–845, 1999.
- [79] C.Y. Suen and P.S.P. Wang. *Thinning Methodologies for Pattern Recognition*. World Scientific Publishing Co., Inc., 1994.
- [80] G. Taubin. Curve and surface smoothing without shrinkage. In *ICCV*, pages 852–857, 1995.
- [81] Y.F. Tsao and K.S. Fu. A parallel thinning algorithm for 3-D pictures. *Computer Graphics and Image Processing*, 17:315–331, 1980.
- [82] T. Wang and A. Basu. A note on ‘a fully parallel 3D thinning algorithm and its applications’. *Pattern Recognition Letters*, 28:501–506, 2007.
- [83] R.-Y. Wu and W.-H. Tsai. A new one-pass parallel thinning algorithm for binary images. *Pattern Recognition Letters*, 13:715–723, 1992.
- [84] D. Yu and H. Yan. An efficient algorithm for smoothing, linearization and detection of structural feature points of binary image contours. *Pattern Recognition*, 30(1):57–69, 1997.
- [85] T. Y. Zhang and C. Y. Suen. A fast parallel algorithm for thinning digital patterns. *Communications of the ACM*, 27:236–239, 1984.